Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

LØSNINGSFORSLAG EKSAMEN VÅR07, MA0301

Oppgave 1 Om mengder.

a) (10%) Sett opp en medlemsskapstabell (membership table) for

$$\left(\overline{(A \cap \overline{B})) \cup C)} \cap (A \cup B)\right).$$

SVAR:

A	B	C	$A \cap \overline{B}$	$\overline{(A \cap \overline{B})) \cup C)}$	$(A \cup B)$	Hele uttrykket
0	0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	0	0	0
0	1	0	0	1	1	1
0	1	1	0	0	1	0
1	0	0	1	0	1	0
1	0	1	1	0	1	0
1	1	0	0	1	1	1
1	1	1	0	0	1	0

b) (10%) Hvilke av disse utsagnene om mengder er sanne?

i) $\emptyset \in \emptyset$
ii) $\emptyset \subset \emptyset$
iii) $\emptyset \subseteq \emptyset$
iv) $\emptyset \in \{\emptyset\}$
v) $\emptyset \subset \{\emptyset\}$

SVAR:

i) usann, ingen elementer i $\emptyset$
ii) usann, disse mengdene er like
iii) sant, alltid sant
iv) sant, $\emptyset$ er et element i $\{\emptyset\}$
v) sant, alltid sant siden den høyre mgd $\neq \emptyset$

Oppgave 2 (10%) Bestem koeffisienten til xyz^2 i ekspansjonen av

i) $(x + y + z)^4$ **ii)** $(2x - y + 2z^2 - 5)^5$.

SVAR: Del **i)** er grei, det er multinomialteoremet rett frem. I del to skal tallene i uttrykket også være med, og siden z allerede er opphøyd i andre i parentesen så skal det leddet bare taes med en gang (benytter multinomial-notasjon):

i) $\binom{4}{1,1,2} = 12$ **ii)** $\binom{5}{1,1,1,2} \cdot 2 \cdot -1 \cdot 2 \cdot (-5)^2 = -6000.$

Oppgave 3 (10%) For de følgende kvantifiserte utsagnene så består universet av alle heltall unntatt 0, dvs $\mathcal{U} = \mathbb{Z} - \{0\}$. Hvilke av utsagnene er da sanne:

i) $\exists x \exists y\ [xy = 1]$ **ii)** $\forall x \exists y\ [xy = 1]$.

Pass på å begrunne svarene dine.

SVAR: **i)** er sann, det finnes heltall x og y slik at $x \cdot y = 1$, nemlig 1 og -1. **ii)** er usann. For at denne skulle være sann måtte det for alle heltall x finnes et heltall y slik at $x \cdot y = 1$. Dette er ikke mulig, hvis f.eks $x = 3$ så må da $y = \frac{1}{3}$, som ikke er et heltall.

Oppgave 4 a) (10%) Vi har alfabetet $\Sigma = \{0, 1\}$. Bestem hvilke av de følgende språkene (tatt fra Σ^*) som inneholder strengen 00010:

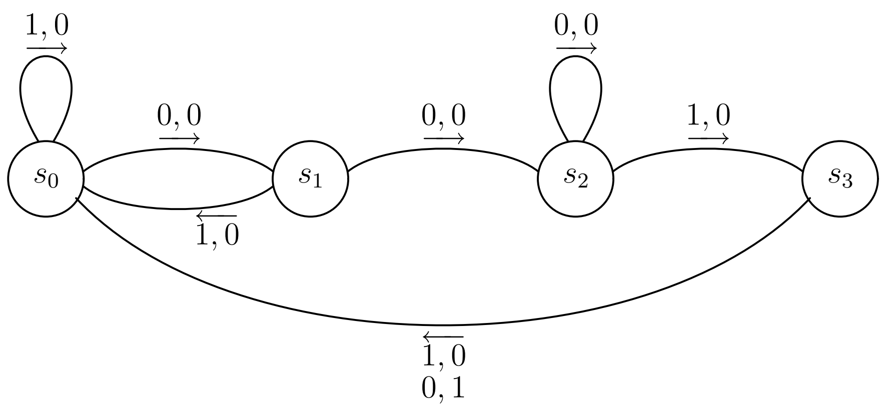
i) $\{000, 101\}\{10, 11\}$ **ii)** $\{00\}\{0\}^*\{10\}$
iii) $\{000\}^*\{1\}^*\{0\}$ **iv)** $\{0\}^*\{1\}^*\{0\}^*$
v) $\{00\}^*\{10\}^*$

SVAR:

i) sann: $\{000\}\{10\}$
ii) sann: $\{00\}\{0\}\{10\}$
iii) sann: $\{000\}\{1\}\{0\}$
iv) sann: $\{0\}\{0\}\{0\}\{1\}\{0\}$
v) usann: Disse strengene starter alltid med et partall antall 0’er.

b) (10%) Tegn en endelig tilstands maskin som gjenkjenner (recognizes) alle strengene i språket $\{00\}\{0\}^*\{10\}$. Input alfabetet for denne maskinen skal være Σ fra del a) av denne oppgaven.

SVAR: Maskinen skal kjenne igjen strenger av variabel lengde, men det strengene skal inneholde har lengde 4, tillegget er eventuelle ekstra 0'er. Maskinen kan lages både slik at den lar strenger overlappe eller ikke lar strenger overlappe. Denne maskinen 'ser ikke' de overlappende delene av strengen:



Oppgave 5 (10%) For $n \geq 0$, la F_n være det n'te Fibonacci-tallet. Benytt matematisk induksjon til å vise at

$$\sum_{i=0}^{n} F_i = F_{n+2} - 1,$$

for alle $n \geq 0$.

SVAR: Basissteget:
Basissteget utføres for $n = 0$, som gir, via definisjonen for Fibonacci-tallene:

$$\sum_{i=0}^{0} F_i = F_0 = 0 = 1 - 1 = F_2 - 1,$$

så basissteget holder.

Induksjonssteget:
Vi antar at $\sum_{i=0}^{k} F_i = F_{k+2} - 1$ for $k \geq 0$, og vil vise at dette medfører $\sum_{i=0}^{k+1} F_i = F_{(k+1)+2} - 1 = F_{k+3} - 1$. Husk at fibonacci-tallene er rekursivt definert som $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$. Vi regner:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{k+1} F_i &= \sum_{i=0}^{k} F_i + F_{k+1} \\ &= F_{k+2} - 1 + F_{k+1} \\ &= F_{k+3} - 1, \end{aligned}$$

som var det vi ville vise.

Oppgave 6 Telling. I denne oppgaven ser vi på en situasjon hvor du skal trekke *ett* kort fra *hver* av 5 *distinkte* urner, altså 5 kort tilsammen. I hver urne er det 10 kort, og disse kortene er numerert med hvert heltall fra og med 1 til og med 10. I tillegg er alle kortene merket med hvilken urne kortet kom fra.

a) (10%) Hvor mange måter kan denne trekkingen av kort gjøres på?

SVAR: For en trekning spiller det ingen rolle hvilken urne vi trekker fra når, så dette kan en se bort fra. Vi har 10 valg pr urne, og 5 urner, som gir 10^5 forskjellige måter dette kan gjøres på, etter produktregelen.

b) (10%) Hvis vi bare ser på tallverdiene på kortene vi trekker, ikke hvilken urne kortene kom fra, så kan trekningene fra del a) av oppgaven deles i kategoriene *ingen like* tallverdier, *to like*, *tre like*, *fire like*, *fem like*, *to og to like*, og tilslutt *to og tre like* (tallverdier).

Hvor mange av trekningene fra del a) av oppgaven er det i hver kategori?

SVAR: Vi skal hele tiden fordele utfallene fra oppgaven over, så vi må, for å få riktige antall, holde styr på hvor mange valg vi har i hver urne.
ingen like: Vi har 10 valg i første urne, 9 i andre, osv, som gir $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 10\mathbf{P}5 = 30240$.
to like: Valg av hvilke to urner vi skal ha de to like fra kan gjøres på $5\mathbf{C}2$ måter. Etter dette har vi 10 og 9 osv valg, som gir $5\mathbf{C}2 \cdot 10\mathbf{P}4 = 50400$
tre like: Samme system som to like gir $5\mathbf{C}3 \cdot 10\mathbf{P}3 = 7200$
fire like: Samme system igjen gir $5\mathbf{C}4 \cdot 10\mathbf{P}2 = 450$
fem like: Disse er det 10 av, enten alle 1'ere eller alle 2'ere, som gir $10 (= 5\mathbf{C}5 \cdot 10\mathbf{P}1)$.
to og to like: Nå blir det litt mer tricky. Vi har 3 valg av tall, som gir $10 \cdot 9 \cdot 8$, men hvor mange måter kan disse fordeles på? Hvis vi ser på det som antall forskjellige tall vi kan skrive med de valgte tallene så blir dette $\frac{5!}{1!2!2!}$. Men ganger vi sammen disse blir alt telt to ganger: Hvis vi velger tallene ABC og skriver AABBC så blir dette det samme som om vi

velger tallene BAC og skriver BBAAC. Det blir med andre ord $10\mathbf{P}3 \cdot \frac{5!}{1!2!2!} \cdot \frac{1}{2} = 10800$. *to og tre like*: To valg, og antall mulige tall vi kan skrive med disse er $\frac{5!}{2!3!}$, som gir $10\mathbf{P}2 \cdot \frac{5!}{2!3!} = 900$.

Oppgave 7 (10%) Denne grafen reprensenterer mulige veivalg og tilhørende distanser mellom *Kessel* og *Bespin*.

Bruk Dijkstra's algoritme til å finne korteste vei fra Kessel til Bespin. Du behøver *ikke* skrive ned gangen i selve algoritmen, bare de fulle merkelappene (labels) på hjørnene, og hvordan de har utviklet seg under bruk av algoritmen.

SVAR: Når hjørnene i grafen ble undersøkt i rekkefølgen Kessel, d, b, e, f, g, i ,k, h, l, n, j, m så blir merkelappene som følger: