Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Steffen Junge (73 59 17 73 / 94 16 27 27)

Eksamen i "Elementær Diskret Matematikk" - (MA0301)

Tirsdag 27. mai 2008
Tid: 9:00 – 13:00
Hjelpemidler: Lærebok, bestemt enkel kalkulator (HP30S)

Oppgavesettet består av oppgavene 1-8 som alle skal besvares. Av oppgavene 9 og 10 skal bare én besvares. Dersom du allikevel velger å besvare begge regnes oppgave 9 som tellende. Alle spørsmål og delspørsmål vektes likt. Alle svar skal begrunnes.

Oppgave 1 Hvor mange positive tall n kan vi danne ved å bruke sifrene $2, 3, 3, 4, 4, 4, 7$?

Svar: De syv sifrene $2, 3, 3, 4, 4, 4, 7$ kan arrangeres på :

$$\frac{7!}{2!3!} = 420$$

måter.

Oppgave 2 Avgjør om følgende argument er gyldig:

$$\begin{array}{rl}
 & p \to q \\
 & p \vee \neg r \\
 & \neg r \to (t \to s) \\
 & \neg q \\
\hline
\therefore & \neg s \to \neg t
\end{array}$$

Svar: Først ser vi at $p \rightarrow q$ og $\neg q$ impliserer $\neg p$. Men $\neg p$ og $p \vee \neg r$ impliserer $\neg r$. Dermed er $\neg r$ og $\neg \rightarrow (t \rightarrow s)$ sanne og det er bare mulig hvis $t \rightarrow s$ er sann. Dette utsagnet er ekvivalent med $\neg s \rightarrow \neg t$ og vi har vist at argumentet er gyldig.

Oppgave 3 La A og B være to mengder. Skriv mengden

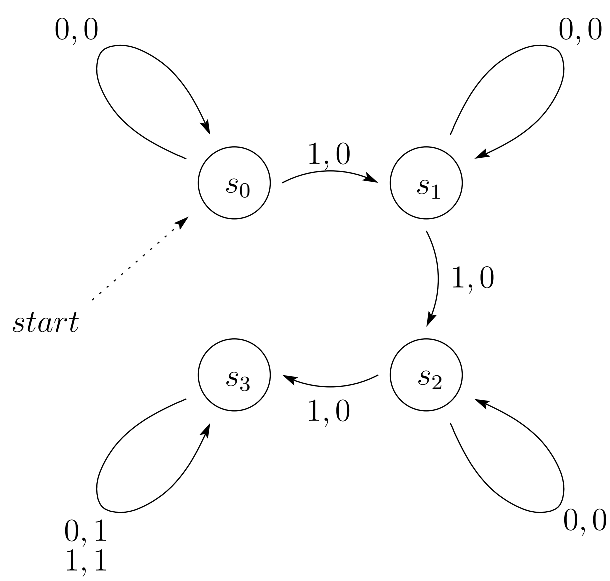
$$(A \cup B) - (B - A)$$

på kortest mulige måte.

Svar:

$$\begin{aligned}(A \cup B) - (B - A) &= (A \cup B) \cap \overline{(B \cap \overline{A})} = (A \cup B) \cap (\overline{B} \cup A)\\ &= A \cup (B \cap \overline{B}) = A \cup \varnothing = A\end{aligned}$$

Oppgave 4 Hva gjør følgende maskine med et input fra språket $\{0, 1\}^*$:



Svar: Maskinen starter med å spytte ut 0'er men etter tredje 1'er i inputtet skriver maskinen ut bare 1'ere.

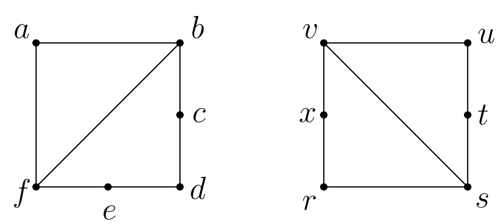
Oppgave 5 La $\mathcal{R}$ være relasjonen på $\mathbb{Z}$ definert ved: $n\mathcal{R}m$ hvis og bare hvis $n \leq m$. Angi uten bevis om $\mathcal{R}$ er: Symmetrisk? Antisymmetrisk? Refleksiv? Transitiv?

Svar: Relasjonen er antisymmetrisk, refleksiv og transitiv.

Oppgave 6 Et land skal planlegge sin fremtidige flytrafikk. Det skal være 13 flyplasser og hver av disse skal ha tur-retur forbindelse til nøyaktig fem av de andre flyplassene. Videre skal en kunne reise mellom alle flyplasser hvis en er villig til å bytte fly. Lar dette seg gjøre? Begrunn svaret ditt.

Svar: Antar vi dette lar seg gjøre kan vi modellere problemet som en sammenhengende graf med 13 hjørner der alle hjørner har grad 5. Dermed er summen av graderne lik 65. Men summen av graderne skal også være det dobbelte av antallet av kanter - altså et partall. 65 er ikke et partall så dette lar seg ikke gjøre.

Oppgave 7 Er følgende to grafer isomorfe? Homeomorfe? Begrunn svaret ditt.



Svar: Grafene er ikke isomorfe siden den venstre har en sykel av lengde 5 - (f-e-d-c-b-f). Det har ikke grafen til høyre. Grafene er homeomorfe siden den ene kan konstrueres ut fra den andre ved insetting og sletting av lineære hjørner.

Oppgave 8 Vis ved induksjon at:

$$2 + 4 + 6 + 8 + \cdots + 2n = n(n+1)$$

Svar: Hvis $n = 1$ er $2 = 1(1+1)$ og dette etablerer startskrittet i induksjonen. Heretter antar vi riktigheten av ovenstående formel for en arbitrær n og ser på:

$$2 + 4 + \cdots 2n + 2(n+1) = n(n+1) + 2(n+1) = (n+1)(n+2)$$

Pr. induksjon er vi ferdig.

Kun én av oppgavene 9 og 10 skal besvares.

Oppgave 9 Det fleste kjenner sikkert til terningspillet yatzy, der en kaster fem vanlige sekssidede terninger. Anta i denne oppgave at vi har fem ulikt fargede terninger.

(a) Hvor mange ulike kast med disse fem terninger finns det?

Svar: Alle fem terninger kan vise seks verdier så svaret her er $6^5 = 7776$.

(b) Stor straight er når en oppnår kombinasjonen $2-3-4-5-6$ og liten straight er når en oppnår kombinasjonen $1-2-3-4-5$. Hvor mange av kastene i (a) er stor eller liten straight?

Svar: Stor straight kan oppnås på 5! måter og liten straight på like mange måter. Det vil si at stor eller liten straight kan oppnås på $2 \cdot 5! = 240$ måter.

(c) To par er når en oppnår par i to ulike verdier pluss en enkelt av en tredje verdi, eksempelvis $5-5-2-2-4$. Hvor mange av kastene i (a) er to par?

Svar: Første par kan vi velge ut på $C(5,2)$ måter og vise 6 ulike verdier. Neste par kan velges på $C(3,2)$ måter og kan vise 5 ulike verdier. Den siste terningen kan vise 4 ulike verdier.En kunne tro dette gir

$$C(5,2) \cdot 6 \cdot C(3,2) \cdot 5 \cdot 4 = 3600$$

ulike kast, men dette er feil. Grunnen til dette er at alle muligheter på denne måten telles dobbelt. Hver gang vi har valgt et par terninger som vårt første par svarer dette jo til et helt likt kast der vi har valgt det samme paret med de samme verdier som vårt andre par... Konklusjonen på dette er at vi må dele med 2 og vi får derfor 1800 muligheter.

Oppgave 10 La $n, m \geq 2$ og betrakt grafen $K_{n,m}$.

(a) Hva er minste lengde en sykel i $K_{n,m}$ kan ha? Begrunn svaret ditt.

Svar: Dette skyldes at en sykel i en bipartite graf må ha minst lengde 4 og 4 realiseres enkelt i $K_{n,m}$. Hvis en bipartite graf G hadde en sykel på lengde 3 måtte en av kanterne gå mellom hjørner i samme del av G's partisjon og det går ikke pr. definisjon.

(b) La e angi antall kanter og v antall hjørner i $K_{n,m}$. Vis at hvis $K_{n,m}$ er plan da er $e \leq 2v - 4$.

Svar: Lar vi r angi antall regioner $R_1, \ldots, R_r$ avgrenset av en plan representasjon av $K_{n,m}$ får vi ved å bruke svaret fra (a):

$$2e = \sum \deg R_i \leq 4r \Rightarrow e \leq 2r$$

Men $2 = v - e + r \geq v - e + \frac{e}{2} = v - \frac{e}{2}$ og dermed er $e \leq 2v - 4$.

(c) Bruk (b) til å vise at $K_{3,4}$ ikke er plan.

Svar: Vi noterer oss først at i $K_{3,4}$ er $e = 3 \cdot 4 = 12$ og $v = 3 + 4 = 7$. Antar vi $K_{3,4}$ er plan bruker vi (b):

$$12 \leq 2 \cdot 7 - 4 = 10$$

Noe som forhåpentligvis virker merkelig på de fleste.