Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Kristian Gjøsteen 73 55 02 42

EKSAMEN I MA0301 ELEMENTÆR DISKRET MATEMATIKK

Bokmål
Tirsdag 1. desember 2009
Tid: 0900-1300
Ingen trykte eller håndskrevne hjelpemidler tillatt. Bestemt, enkel kalkulator tillatt.

Alle oppgaver teller likt. Alle svar skal begrunnes.

Oppgave 1 På en eksamen med ti ja/nei-spørsmål må studentene ha minst tre av ti riktige for å stå, og minst åtte av ti riktige for å få toppkarakter.

Hvor mange ulike måter kan studentene svare på? Hvor mange av disse svarer til ståkarakter? Hvor mange svarer til ståkarakter, men ikke til toppkarakter?

Oppgave 2

a) Er $(p \to q) \leftrightarrow (\neg q \vee p)$ en tautologi?

b) Bruk logiske regneregler til å vise at $\neg(p \vee (\neg p \wedge q))$ og $\neg p \wedge \neg q$ er logisk ekvivalente.

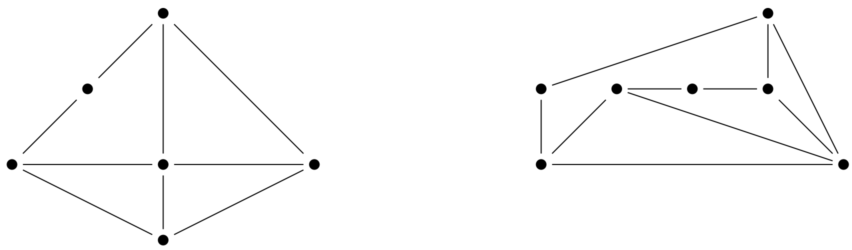
c) Vis at konklusjonen p følger fra premissene (i) $\neg p \to q$, (ii) $\neg q \vee \neg r \vee \neg s$, (iii) $s \to r$ og (iv) s.

Oppgave 3 Lag en endelig tilstandsmaskin som gjenkjenner strengene i språket $\{000\}\{10, 01\}^*\{111\}$.

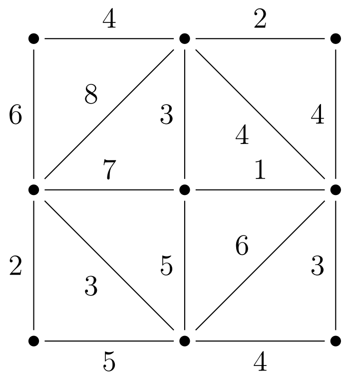
Oppgave 4

a) Vis ved induksjon at $2^n \leq n!$ for alle heltall $n \geq 4$.

b) Forklar hvorfor følgende to grafer er homeomorfe, men ikke isomorfe.



c) Hva er et minimalt utspennende undertre? Bruk Kruskals eller Prims algoritme til å finne et minimalt utspennende undertre for den vektede grafen og den totale vekten i dette undertreet:



Oppgave 5 La A og B være to mengder, og la $f : A \to B$ være en surjeksjon (funksjonen er på). La $\sim$ være relasjonen på $A \times A$ gitt ved

$$a \sim b \quad \Leftrightarrow \quad f(a) = f(b).$$

a) Forklar hva en ekvivalensrelasjon er.

Vis at $\sim$ er en ekvivalensrelasjon.

b) La S være mengden av ekvivalensklasser til $\sim$. Vi lar $[x]$ betegne ekvivalensklassen som inneholder a. Forklar hvorfor vi kan definere en funksjon $g : S \to B$ ved at $g([a]) = f(a)$. Forklar hva en bijeksjon er, og vis at g er en bijeksjon.