Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Kristian Gjøsteen 73 55 02 42

EKSAMEN I MA0301 ELEMENTÆR DISKRET MATEMATIKK

Bokmål
Torsdag 28. mai 2009
Tid: 0900-1300
Ingen trykte eller håndskrevne hjelpemidler tillatt. Bestemt, enkel kalkulator tillatt.

Alle oppgaver teller likt. Alle svar skal begrunnes.

Oppgave 1 På en eksamen med ti ja/nei-spørsmål må studentene ha minst fire av ti riktige for å stå, og minst ni av ti riktige for å få toppkarakter.

Hvor mange ulike måter kan studentene svare på? Hvor mange av disse svarer til ståkarakter? Hvor mange svarer til ståkarakter, men ikke til toppkarakter?

Oppgave 2

a) Er $(p \to q) \leftrightarrow (\neg q \to \neg p)$ en tautologi?

b) Bruk logiske regneregler til å vise at $p \leftrightarrow q$ og $(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$ er logisk ekvivalente.

c) Vis at konklusjonen $\neg p$ følger fra premissene (i) $p \to q$, (ii) $\neg q \vee \neg r \vee \neg s$, (iii) $s \to r$ og (iv) s.

Oppgave 3 Lag en endelig tilstandsmaskin som gjenkjenner strengene i språket $\{1\}\{01\}^*\{01\} \cup \{0\}\{10\}^*\{1\}$.

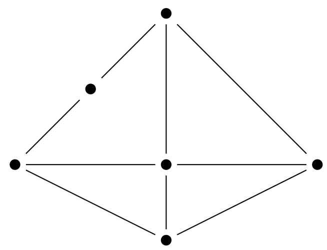
Oppgave 4

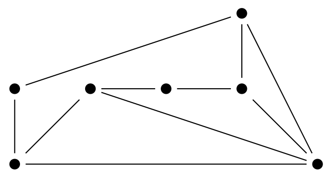
a) Vis ved induksjon på antall hjørner at antall kanter i den komplette grafen med n hjørner er

$$\sum_{i=1}^{n-1} i.$$

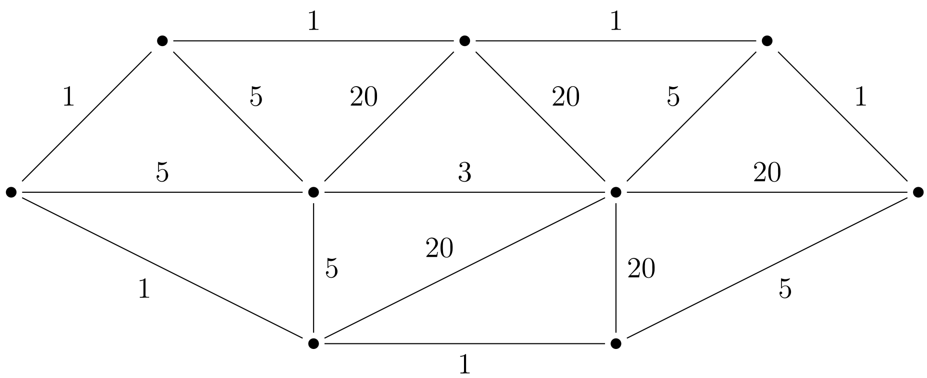
Merk: Når $n = 1$ tolkes summen som 0.

b) Er følgende to grafer isomorfe? Homeomorfe?





c) Hva er et minimalt utspennende undertre? Bruk Kruskals eller Prims algoritme til å finne et minimalt utspennende undertre for den vektede grafen og den totale vekten i dette undertreet:



Oppgave 5 La $\mathbb{N}$ være de naturlige tallene $\{0, 1, 2, \dots\}$ og la $\mathbb{Z}$ være heltallene $\{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$. La $\sim$ være relasjonen på $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ gitt ved

$$(a, b) \sim (c, d) \quad \Leftrightarrow \quad a + d = b + c.$$

a) Forklar hva en ekvivalensrelasjon er.

Vis at $\sim$ er en ekvivalensrelasjon.

b) Forklar hva en bijeksjon er.

La S være mengden av ekvivalensklasser til $\sim$. Vi lar $[(x, y)]$ betegne ekvivalensklassen som inneholder (x, y). La $f : \mathbb{Z} \to S$ være en funksjon gitt ved

$$f(x) = \begin{cases} [(x, 0)] & x \geq 0 \\ [(0, -x)] & x < 0. \end{cases}$$

Vis at f er en bijeksjon. Hva er f^{-1}?