Trondheim, 29. mai 2009

Løsningsforslag, MA0301 Elementær Diskret Matematikk, våren 2009

Oppgave 1 Det er to valg på hver oppgave og ti oppgaver. Hver oppgave er uavhengig av de andre, dermed får vi $\boxed{2^{10} = 1024}$ mulige besvarelser.

En besvarelse får ståkarakter hvis den har fire eller flere riktige svar. Antall besvarelser som svarer til ståkarakter er altså antall besvarelser med fire riktige svar pluss antall med fem riktige svar, osv. På en besvarelse med fire riktige svar kan vi velge plasseringen av de riktige svarene, og det er $\binom{10}{4}$ mulige valg. Tilsvarende for fem, seks, ..., ti riktige svar. Til sammen får vi

$$\boxed{\# = \sum_{i=4}^{10} \binom{10}{i}}.$$

For ståkarakter, men ikke toppkarakter får vi

$$\boxed{\# = \sum_{i=4}^{8} \binom{10}{i}}.$$

Oppgave 2

a. Vi lager en sannhetstabell:

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \to q$	$\neg q \to \neg p$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	0
1	1	0	0	1	1

Uttrykkene er logisk ekvivalente.

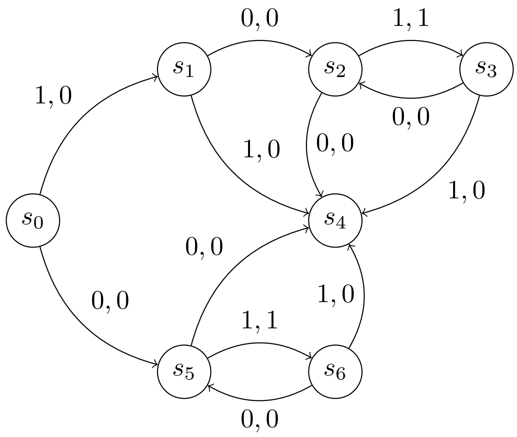
b. Vi bruker først identiteten $x \to y \Leftrightarrow \neg x \vee y$, deretter de distributive lovene $(x \vee y) \wedge z \Leftrightarrow (x \wedge z) \vee (y \wedge z)$, og til slutt absorpsjon $x \vee 0 \Leftrightarrow x$:

$$\begin{aligned}
p \leftrightarrow q &\Leftrightarrow (p \to q) \wedge (q \to p) \\
&\Leftrightarrow (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p) \\
&\Leftrightarrow (\neg p \wedge (\neg q \vee p)) \vee (q \wedge (\neg q \vee p)) \\
&\Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge p) \vee (q \wedge \neg q) \vee (q \wedge p) \\
&\Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q) \vee (q \wedge p)
\end{aligned}$$

c. Konklusjonen følger slik:

$$\begin{aligned}
\text{(iii) og (iv)} &\Rightarrow r \\
\text{(ii) og (iv) og } r &\Rightarrow \neg q \\
\text{(i) og } \neg q &\Rightarrow \neg p
\end{aligned}$$

Oppgave 3 Det er lettere å lage tilstandsmaskinen hvis vi først observerer at vi kan beskrive språket som $\{101\}\{01\}^* \cup \{01\}\{01\}^*$. En mulig maskin er da:



Vi har ikke tegnet overgangene $s_4 \xmapsto{0,0} s_4$ og $s_4 \xmapsto{1,0} s_4$.

Oppgave 4

a. Påstanden vi skal bevise er $P(n)$: *Den komplette grafen med n hjørner har $\sum_{i=1}^{n-1} i$ kanter.*

Vi starter med $n = 1$. Den komplette grafen med ett hjørne har ingen kanter, så $P(1)$ er sann.

Anta at $P(k)$ er sann, og se på den komplette grafen K_{k+1} med $k + 1$ hjørner. Velg ut k av hjørnene og se på undergrafen H med disse hjørnene og maksimalt antall kanter. Vi kan nå telle antall kanter i K_{k+1} ved å telle antall kanter i H og antall kanter som er i K_{k+1}, men ikke i H.

Undergrafen H er den komplette grafen med k hjørner, og siden $P(k)$ er antatt sann har den $\sum_{i=1}^{k-1} i$ kanter. De eneste kantene i K_{k+1} som ikke er med i H er kantene til de siste hjørnet. Siden grafen er komplett er dette hjørnet forbundet med k andre hjørner, det er altså k kanter i K_{k+1} som ikke er i H. Dermed har vi at

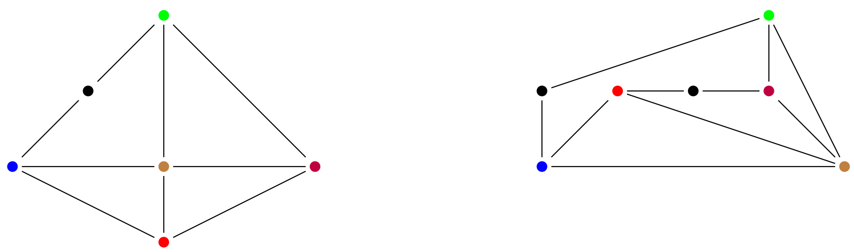
$$\# = \left(\sum_{i=1}^{k-1} i\right) + k = \sum_{i=1}^{k+1-1} i.$$

Dermed har vi vist at det for alle k er slik at $P(k) \to P(k+1)$.

Ved matematisk induksjon følger det at $P(n)$ holder for alle n.

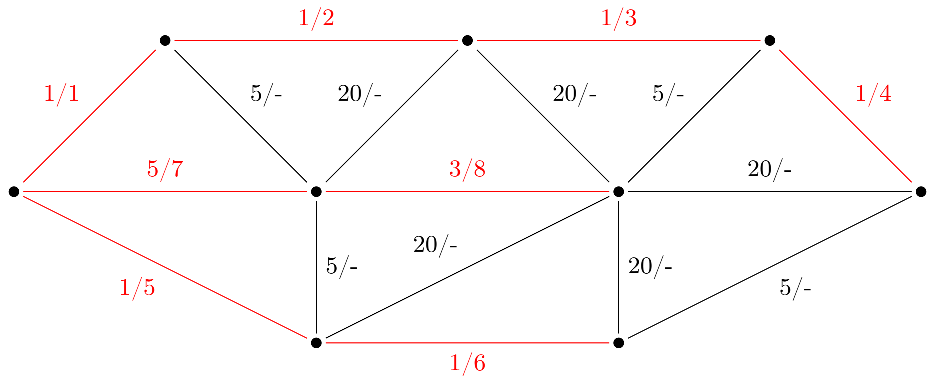
b. Grafene er ikke isomorfe, siden den ene har seks hjørner mens den andre har syv hjørner.

Grafene er homeomorfe som følgende diagram viser:



c. Definisjonen av minimalt utspennende undertre finnes i læreboken.

Her er et utspennende undertre, kantene er merket etter hvilken rekkefølge de ble lagt til (Prims algoritme). Vekten er $\boxed{14}$.



Oppgave 5

a. Definisjonen av ekvivalensrelasjon står i læreboken.

Vi må vise at $\sim$ er refleksiv, symmetrisk og transitiv.

Refleksiv: Siden $a+b=a+b$ må $(a,b) \sim (a,b)$.

Symmetrisk: Anta $(a,b) \sim (c,d)$, dvs. $a+d=b+c$. Siden $b+c=c+b$ og $a+d=d+a$ har vi at $c+b=d+a \Leftrightarrow (c,d) \sim (a,b)$.

Transitiv: Anta at $(a,b) \sim (c,d)$ og $(c,d) \sim (e,f)$. Da er $a+d=b+c$ og $c+f=e+d$. Addisjon gir oss

$$a+d+c+f=b+c+e+d,$$

hvorpå vi kan kansellere c og d som gir oss

$$a+f=b+e \Leftrightarrow (a,b) \sim (e,f).$$

Dermed har vi vist at $\sim$ er en ekvivalensrelasjon.

b. Definisjonen av bijeksjon står i læreboken.

Vi må vise at f er 1-1 og på.

1-1: Anta at $f(x)=f(y)$. Hvis x og y begge er større enn eller lik 0 må $[(x,0)]=[(y,0)]$, da er $(x,0) \sim (y,0)$ som vil si at

$$x+0=y+0 \Rightarrow x=y.$$

Hvis $x \geq 0$ og $y<0$, da er $[(x,0)]=(0,-y)]$ som vil si at

$$x-y=0+0 \Rightarrow x=y,$$

som er umulig. Tilsvarende argumenter gjøres for tilfellene når $x<0$, $y \geq 0$ og når begge er negative.

på: La (x,y) representere en ekvivalensklasse. Vi påstår at $f(x-y)=[(x,y)]$. Hvis $x \geq y$ er $x+0=x-y+y \Leftrightarrow (x,y) \sim (x-y,0)$, som vil si at $f(x-y)=[(x-y,0)]=[(x,y)]$. Hvis $x<y$ får vi på samme måte at $f(x-y)=[(0,y-x)]=[(x,y)]$.

Funksjonen er dermed bijektiv. Som vi har sett er $f^{-1}([(x,y)])=x-y$.