MAD301 2010V – LØSNINGSSKISSE

1. Antall måter å fylle ut første rad på er antall uordnede utvalg med tilbakelegging av 5 objekter blant 3 – de 5 objektene fordeler seg da på 3 celler som vist i tabellen. Antall slike utvalg er $\binom{3+5-1}{5}=\binom{7}{5}=\binom{7}{2}=\frac{7\cdot 6}{1\cdot 2}=21$. Tilsvarende er antall måter å fylle ut andre rad på $\binom{3+6-1}{6}=\binom{8}{6}=\binom{8}{2}=\frac{8\cdot 7}{1\cdot 2}=28$. Tilsammen $21\cdot 28=588$ måter å fylle ut tabellen.

2. Ja, det er en tautologi. Alt. 1: Sannhetsverditabell. Alt. 2: Slutningsregler: $\neg r$ og $p\to r$ gir $\neg p$, $\neg p$ og $\neg q\to p$ gir $\neg\neg q$, dvs. q. Alt. 3: Eneste måte hovedimplikasjonen kan være usann på, er at q er usann og venstre side sann. Venstre side er sann bare hvis alle tre leddene i konjunksjonen er sanne. Da må r være usann, dermed p usann – men da blir $\neg q\to p$ usann, og vi har en motsigelse – det er altså ikke mulig at utsagnet er usant.

3. $\bigcup_{i=2}^{8} A_i = A_8$ ($A_i\subseteq A_8$ for alle $i=2,3,\dots,8$), $\bigcap_{i=2}^{8} A_i = A_2$ ($A_2\subseteq A_i$ for alle $i=2,3,\dots,8$), $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i=\mathbb{Z}^+$ (mengden av alle positive heltall – for alle $k\in\mathbb{Z}^+$ er $k\in A_k$), $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i=\{1\}$ ($\{1\}=A_1\subseteq A_i$ for alle i).

4. Hvis $n=1$, mengden har ett element, har mengden to delmengder – $\emptyset$ og seg selv, dvs. 2^1 delmengder, så utsagnet er sant for $n=1$. Anta at utsagnet er sant for n. Vi skal vise at enhver mengde med $n+1$ elementer har 2^{n+1} delmengder: Sett en slik mengde S. Velg ett element, a. Delmengdene av S er da delmengdene av $S-\{a\}$, som det er 2^n av iflg. induksjonsantakelsen, samt delmengdene av $S-\{a\}$ tillagt elementet a, som det også er 2^n av. Til sammen $2^n+2^n=2\cdot 2^n=2^{n+1}$, og vi har vist at utsagnet er sant for alle $n\in\mathbb{Z}^+$.

5. $f(A)=\{0,1,2,3,5,6,7,8\}$, dvs. 8 distinkte funksjonsverdier, like mange som det er elementer i A. Så hvis $a_1\neq a_2$, $a_1,a_2\in A$, er $f(a_1)\neq f(a_2)$, og f er éntydig. f er ikke på B, da $4\neq f(a)$ for alle $a\in A$.

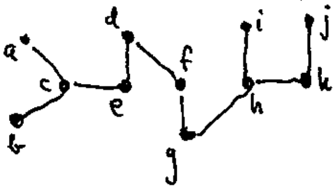
6. $A^0=\{\lambda\}$, $A^1=A=\{1,00\}$, $A^2=\{ab \mid a\in A, b\in A\}=\{11,100,001,0000\}$,
$A^3=\{a,b \mid a\in A, b\in A^2\}=\{111,1100,1001,10000,0011,00100,00001,000000\}$

7. $a=a$ for alle $a\in\mathbb{Z}$, så $(a,a)\in R$, og R er refleksiv.
Hvis $(a,b)\in R$, er $a=b$ el. $a=-b$. Da er $b=a$ el. $b=-a$, så $(b,a)\in R$, og R er symmetrisk.
Hvis $(a,b)\in R$ og $(b,c)\in R$, er $a=\pm b$ og $b=\pm c$, dermed $a=\pm c$, så $(a,c)\in R$, og R er transitiv.
R er ikke antisymmetrisk, for $(1,-1)\in R$ og $(-1,1)\in R$, men $-1\neq 1$.
R er en ekvivalensrelasjon (refl., symm., trans.). Ekvivalensklassene er $\{0\}, \{-1,1\}, \{-2,2\}, \{-3,3\}, \dots$

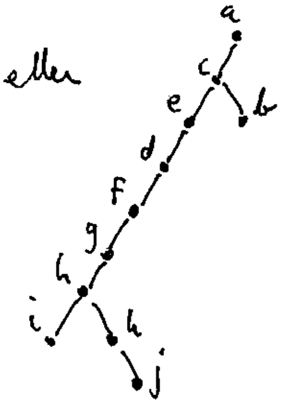
8. De to første er planare:

Den siste er ikke planar, da den har K_5 som en subgraf (indusert av de 5 øverste hjørnene).

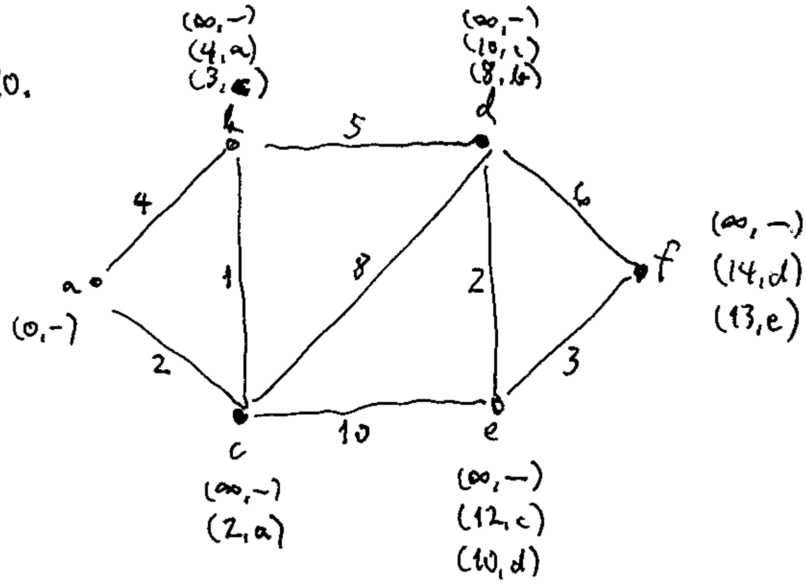
9.



eller



10.



Korteste vei:

a−c−b−d−e−f

Lengde 13