Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Kristian Gjøsteen 73 55 02 42

EKSAMEN I MA0301 ELEMENTÆR DISKRET MATEMATIKK

Bokmål
Tirsdag 20. desember 2011
Tid: 1500-1900
Ingen trykte eller håndskrevne hjelpemidler tillatt. Bestemt, enkel kalkulator tillatt.

Alle oppgaver teller likt. Alle svar skal begrunnes.

Oppgave 1 På en eksamen med ti ja/nei-spørsmål må studentene for å stå ha riktig svar på minst to av de fem første spørsmålene og minst to av de fem siste spørsmålene. For å få toppkarakter må studentene enten ha rett svar på alle de fem første spørsmålene og minst tre av de fem siste spørsmålene, eller ha rett svar på minst fire av de fem første spørsmålene og minst fire av de fem siste spørsmålene.

Hvor mange ulike måter kan studentene svare på? Hvor mange av disse svarer til ståkarakter? Hvor mange svarer til toppkarakter?

Oppgave 2

a) I utsagnslogikk, hva betyr det at to formler er logisk ekvivalente?
Vis at formlene $p \leftrightarrow q$ og $(p \rightarrow q) \wedge (p \leftarrow q)$ er logisk ekvivalente.

b) Bruk logiske regneregler til å vise at $\neg p$ følger fra (i) $p \rightarrow q$, (ii) $s \vee \neg q$ og (iii) $\neg s \vee (t \wedge \neg t)$.

Oppgave 3 Lag en endelig tilstandsmaskin som gjenkjenner strengene i språket

$$\{a\}(\{bc\}\{c\}^*\{d\})^*\{d\} \cup \{ad\}.$$

Oppgave 4 I denne oppgaven skal du besvare enten deloppgave **a)** eller deloppgave **b)**.

a) Programmet du er med på å utvikle har behov for å evaluere polynomer raskt. En luring har kommet opp med følgende algoritme for å evaluere polynomet $\sum_{i=0}^{n} a_i x^{n-i}$:

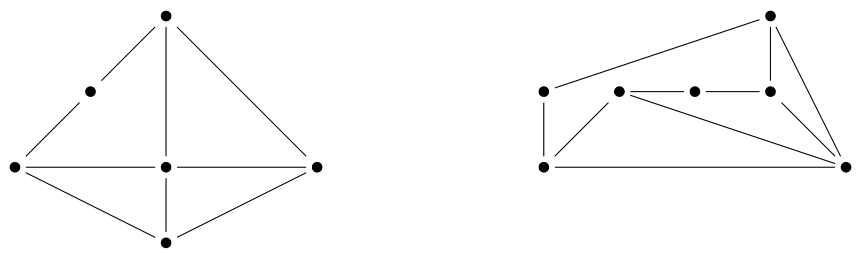
1. $sum = 0$.
2. for i fra 0 til n, inklusive:
   (a) $sum = sum \cdot x + a_i$.

Bruk induksjon til å vise at variabelen *sum* til slutt inneholder verdien av polynomet.

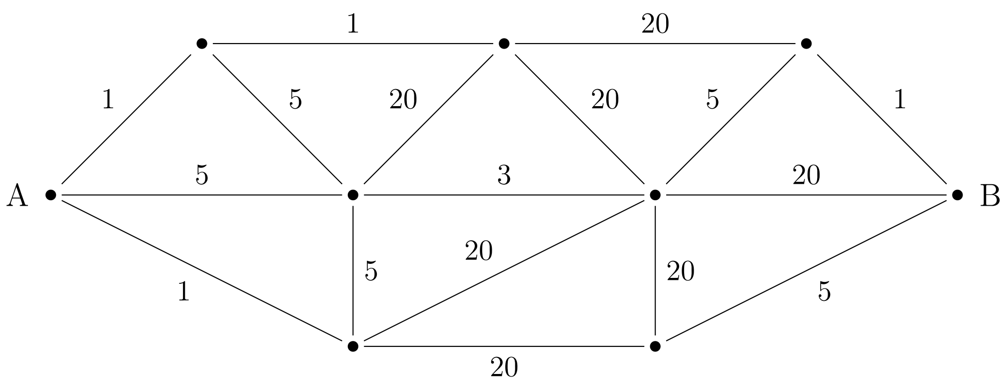
b) Bruk induksjon til å vise at

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Oppgave 5 Er følgende to grafer isomorfe? Homeomorfe?



Oppgave 6 Bruk Dijkstras korteste-vei-algoritme til å finne korteste vei fra A til B i følgende vektede graf:



Oppgave 7 La $\mathbb{Z}$ være heltallene $\{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ og la $\mathbb{Q}$ være de rasjonale tallene. La $\sim$ være relasjonen på $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ gitt ved

$$(a, b) \sim (c, d) \quad \Leftrightarrow \quad ad = bc.$$

a) Forklar hva en ekvivalensrelasjon er.

Vis at $\sim$ er en ekvivalensrelasjon.

b) Forklar hva en bijeksjon er.

La S være mengden av ekvivalensklasser til $\sim$. Finn en bijeksjon fra $\mathbb{Q}$ til S, og vis at det er en bijeksjon.