Kortfattet løsningsforslag
Kontinuasjonseksamen i Elementær diskret matematikk (MA0301) 2013

Oppgave 1

a) Hvor mange forskjellige ord er det mulig å danne med bokstavene i MISSISSIPPI? I hvor mange av disse ordene står de fire I-ene ved siden av hverandre?

Antall ord det er mulig å danne er

$$\frac{11!}{(4!)(4!)(2!)} = 34650.$$

Det å kreve at de fire I-ene står ved siden av hverandre vil si at vi kan oppfatte dem som én bokstav. Altså er vi ute etter antall ord man kan danne med bokstavene i MISSSSPP. Som over er dette antallet gitt ved

$$\frac{8!}{(4!)(2!)} = 840.$$

b) Hva er koeffisienten til x^7y^4 i uttrykket $(3x+2y)^{11}$?

Binomialteoremet forteller oss at leddet som inneholder x^7y^4 i uttrykket over er

$$\binom{11}{7}(3x)^7(2y)^4.$$

Koeffisienten vi er ute etter blir dermed $\binom{11}{7} \cdot 3^7 \cdot 2^4 = 11547360.$

Oppgave 2 Bruk logiske regneregler til å vise at påstandene

$$(\neg(p \vee \neg q)) \to (q \to r)$$

og

$$q \to (p \vee r)$$

er logisk ekvivalente.

$$
\begin{gathered}
(\neg(p \vee \neg q)) \to (q \to r) \\
\Leftrightarrow \\
(\neg(p \vee \neg q)) \to (\neg q \vee r) \\
\Leftrightarrow \\
\neg(\neg(p \vee \neg q)) \vee (\neg q \vee r) \\
\Leftrightarrow \\
(p \vee \neg q) \vee (\neg q \vee r) \\
\Leftrightarrow \\
p \vee (\neg q \vee \neg q) \vee r \\
\Leftrightarrow \\
p \vee \neg q \vee r \\
\Leftrightarrow \\
\neg q \vee (p \vee r) \\
\Leftrightarrow \\
q \to (p \vee r)
\end{gathered}
$$

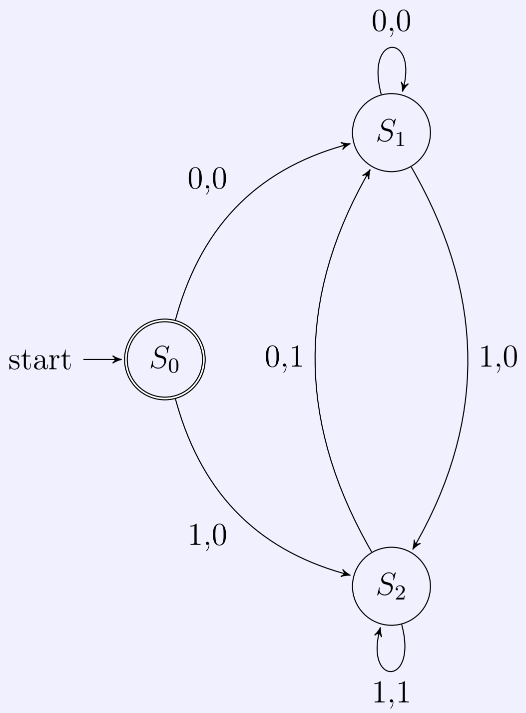
Oppgave 3 La $I = \{0, 1\}$. Tegn en endelig tilstandsmaskin som 'forsinker' input med ett symbol. Det vil si at hvis maskinen får inputstrengen

$$x_1 x_2 x_3 \ldots x_{m-1} x_m \in I^+$$

så skal den returnere strengen

$$0 x_1 x_2 \ldots x_{m-2} x_{m-1}.$$

Følgende maskin løser oppgaven.



Oppgave 4

a) Bruk induksjon til å vise at enhver mengde med n elementer har nøyaktig 2^n delmengder, for hver $n \geq 0$.

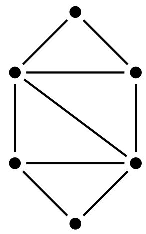
Påstanden er opplagt sann for $n = 0$ og $n = 1$. Anta at påstanden holder for alle mengder med $n \geq 1$ elementer, og la X være en mengde med $n + 1$ elementer. Velg en $x \in X$ og se på mengden $X \setminus \{x\}$. Sistnevnte mengde har 2^n delmengder (induksjonsantagelse), og det er klart at hver delmengde av $X \setminus \{x\}$ gir opphav til to delmengder av X (nemlig en med og en uten x). Det er også klart at enhver delmengde av X opptrer som en av disse, og dermed blir antall delmengder av X gitt ved $2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$.

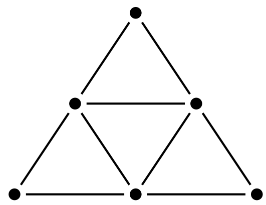
b) La $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Hvor mange relasjoner finnes det på A?

En relasjon på A er en delmengde av det kartesiske produktet $A \times A$. Dette produktet har $5^2 = 25$ elementer. Antall relasjoner på A er dermed likt antall delmengder av en mengde med 25 elementer, altså $2^{25} = 33554432$ i følge forrige deloppgave.

Oppgave 5

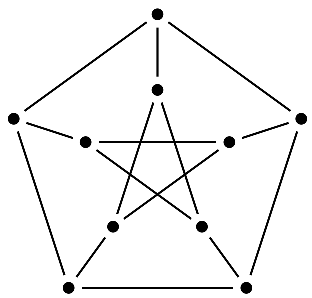
a) Er de følgende to grafene isomorfe?



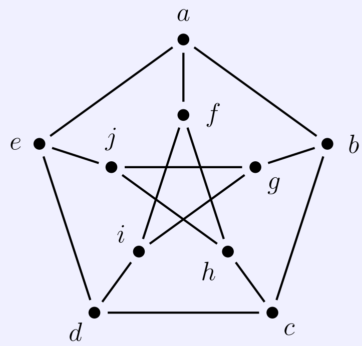


Grafene er ikke isomorfe. Det er tilstrekkelig å observere at grafen til venstre har kun to hjørner av grad 2, mens grafen til høyre har tre hjørner av grad 2.

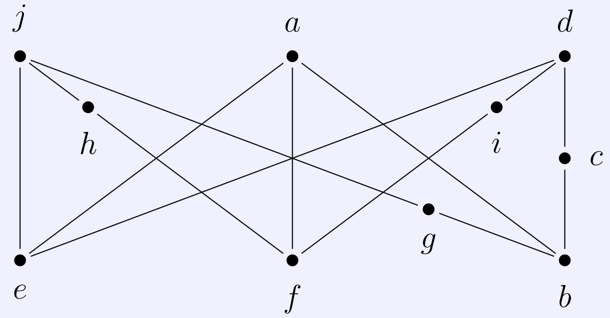
b) Følgende graf er kjent som Petersen-grafen. Vis at den ikke er planar.



Vi starter med å navnsette hjørnene.

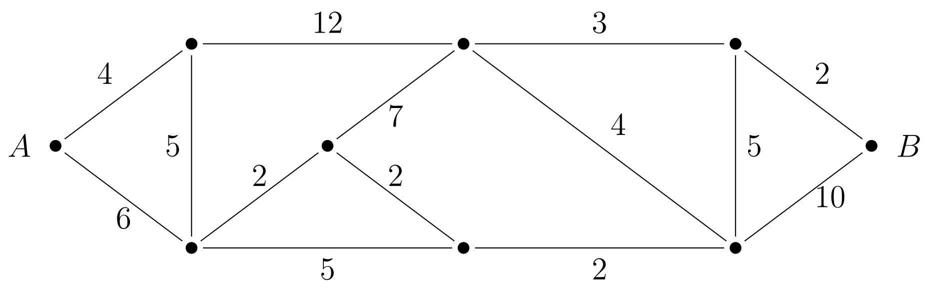


Ved å betrakte følgende undergraf blir det klart at Petersen-grafen ikke er planar (husk at en graf er ikke planar hvis den har en undergraf som er homeomorf med $K_{3,3}$).



Oppgave 6 Bruk Dijkstras algoritme til å finne korteste vei fra A til B i den følgende vektede grafen.

Algoritmen er beskrevet blant annet i læreboka. Den korteste veien fra A til B har lengde 19 og består av kantene av lengde 6, 2, 2, 2, 5 og 2.



Oppgave 7

a) Hva menes med en relasjon på en mengde? Forklar hva som menes med at en relasjon er refleksiv; transitiv; symmetrisk; antisymmetrisk. Hvilke av disse egenskapene definerer en ekvivalensrelasjon?

Her dreier det seg bare om å gjengi definisjoner; disse finnes for eksempel i læreboka.

b) La $\mathbb{R}$ være mengden av reelle tall og la $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ betegne mengden av alle delmengder av $\mathbb{R}$. Betrakt relasjonen $\sim$ på $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ definert ved

$$A \sim B \Leftrightarrow A \cap B \neq \emptyset.$$

Er $\sim$ en ekvivalensrelasjon?

$\sim$ er ikke en ekvivalensrelasjon, da den ikke er transitiv. For å innse dette, se for eksempel på de tre intervallene $A = [0, 2]$, $B = [1, 4]$ og $C = [3, 5]$. Det er klart at $A \cap B \neq \emptyset$ og $B \cap C \neq \emptyset$, hvilket betyr $A \sim B$ og $B \sim C$. Samtidig er $A \cap C = \emptyset$, altså $A \nsim C$.