Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Kortfattet løsningsforslag
Elementær diskret matematikk (MA0301) vår 2013

Oppgave 1

a) Hvor mange forskjellige ord er det mulig å danne med bokstavene i POTETSTAPPE? I hvor mange av disse ordene står de tre P-ene ved siden av hverandre?

Antall ord det er mulig å danne er

$$\frac{11!}{(3!)(3!)(2!)} = 554400.$$

Det å kreve at de tre P-ene står ved siden av hverandre vil si at vi kan oppfatte dem som én P. Altså er vi ute etter antall ord man kan danne med bokstavene i POTETSTAE. Dette antallet er selvfølgelig

$$\frac{9!}{(3!)(2!)} = 30240.$$

b) Hvor mange ikke-negative heltallsløsninger har likningen $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 17$? Hvor mange av løsningene tilfredsstiller $x_2 \geq 2$?

Antall løsninger av denne likningen er gitt ved antall måter man kan fordele 17 på 5, i.e. antall måter man kan velge 17 fra 5 (med tilbakelegging). Dette antallet er

$$\binom{17+5-1}{17} = \binom{21}{17} = 5985.$$

Tilleggskravet $x_2 \geq 2$ svarer til ikke-negative heltallsløsninger av likningen $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 15$. Som over er dette antallet gitt ved

$$\binom{15+5-1}{15} = \binom{19}{15} = 3876.$$

Oppgave 2 Avgjør om

$$((a \to b) \wedge (a \to c)) \to (\neg c \to \neg b)$$

og

$$((p \wedge q) \to r) \Leftrightarrow (p \to (q \to r))$$

er tautologier.

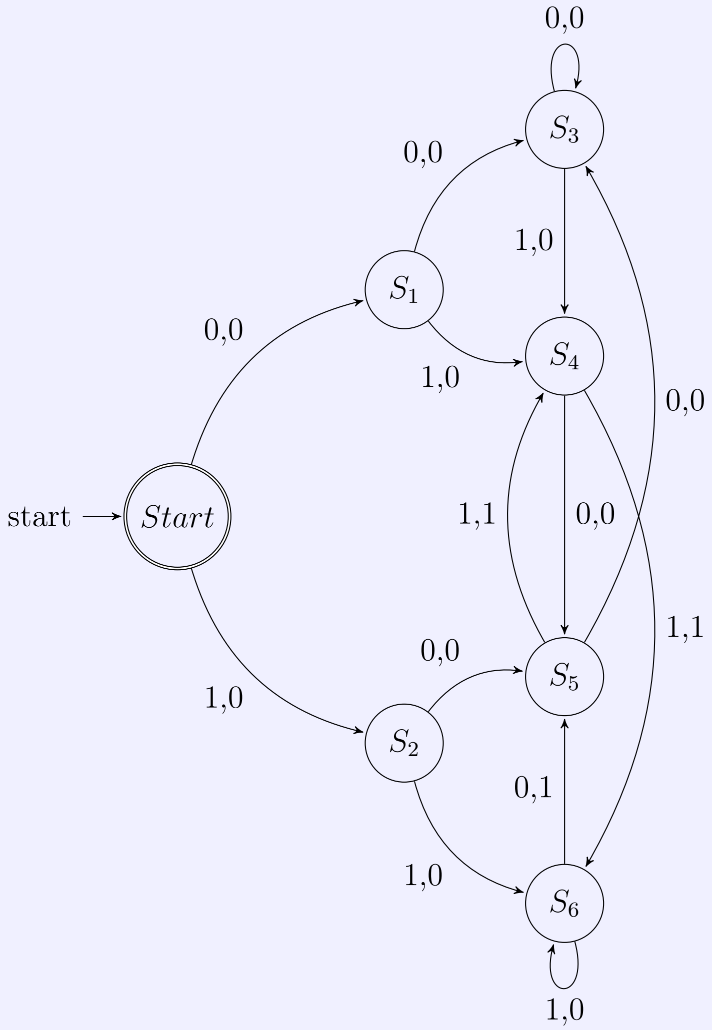
Den første påstanden er ikke en tautologi: Hvis b er sann samtidig som a og c er usanne, så vil $((a \to b) \wedge (a \to c))$ være sann mens $(\neg c \to \neg b)$ er usann.
Den andre påstanden er en tautologi. For å vise det kan man for eksempel sette opp en sannhetstabell:

p	q	r	$(p \wedge q)$	$((p \wedge q) \to r)$	$(q \to r)$	$(p \to (q \to r))$
0	0	0	0	1	1	1
0	0	1	0	1	1	1
0	1	0	0	1	0	1
1	0	0	0	1	1	1
0	1	1	0	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1

Kolonnen under $((p \wedge q) \to r)$ er identisk med kolonnen under $(p \to (q \to r))$. Altså er påstanden $((p \wedge q) \to r) \Leftrightarrow (p \to (q \to r))$ sann uavhengig av sannhetsverdiene til p, q og r. Det betyr at sistnevnte påstand er en tautologi.

Oppgave 3 Lag en endelig tilstandsmaskin med binær input og output som gir output 1 utelukkende når nøyaktig to av de tre siste inputsymbolene har vært 1-ere. (For eksempel skal inputstrengen 011011100 gi outputstrengen 001111010.)

Et eksempel på en slik maskin er



Merk: Dette er ikke en minimal maskin. Det finnes en maskin med kun fire tilstander som løser denne oppgaven.

Oppgave 4

a) Vis ved induksjon at

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

for alle $n \geq 1$.

Det er klart at påstanden holder for $n = 1$ (fordi $1 = \frac{1(1+1)}{2}$).
Anta nå at vi har bevist påstanden for $n = k \geq 1$, altså at

$$\sum_{i=1}^{k} i = \frac{k(k+1)}{2}.$$

Det er tilstrekkelig å vise at påstanden da holder også for $n = k+1$, altså at

$$\sum_{i=1}^{k+1} i = \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Følgende utregning får oss i mål.

$$\sum_{i=1}^{k+1} i = \sum_{i=1}^{k} i + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + k + 1 = \frac{k^2 + k + 2k + 2}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

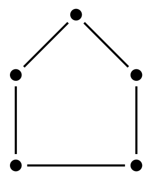
b) 300 elever har fullført videregående skole, og på avslutningsfesten skal hver elev klemme alle de andre elevene. Hvor mange klemmer blir dette til sammen?

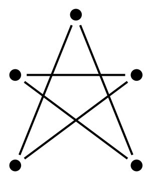
En måte å løse oppgaven på er denne: La elevene stå på rekke, og la eleven lengst til venstre gå forbi resten av rekka mens han deler ut en klem til alle han passerer. Dette blir 299 klemmer. Eleven som opprinnelig sto nest lengst til venstre må nå gjøre det samme: Han passerer en litt kortere rekke og deler ut 298 klemmer på sin vei. Når det til slutt kun er én elev igjen i rekken har alle elevene klemmet hverandre. Det er klart at det totale antallet klemmer er $299 + 298 + 297 + \ldots + 3 + 2 + 1$. Resultatet i forrige deloppgave forteller oss at dette tallet er

$$\frac{299 \cdot 300}{2} = 44850.$$

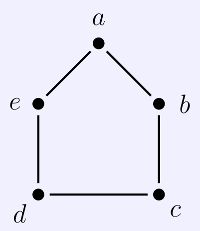
Oppgave 5

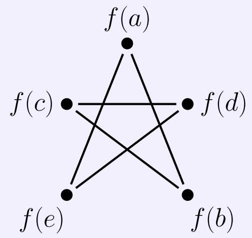
a) Er de følgende to grafene isomorfe?



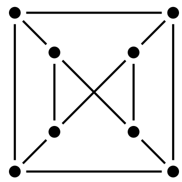


Grafene er isomorfe. Hvis vi definerer f som indikert av figuren under, blir f en grafisomorfi.

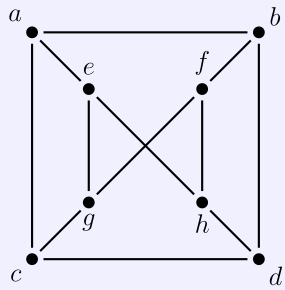




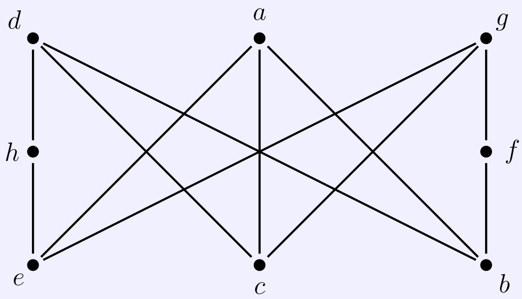
b) Er den følgende grafen planar?



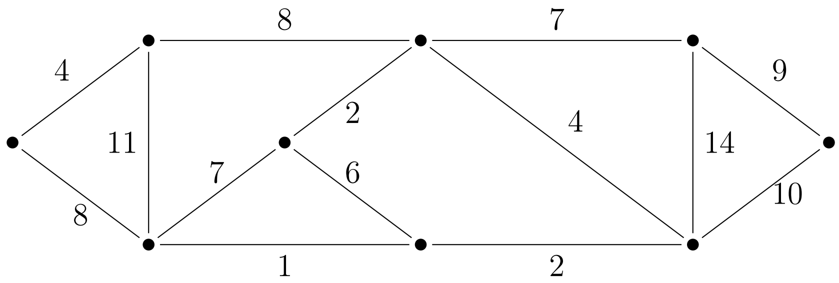
Grafen er ikke planar fordi den har en undergraf som er homeomorf med $K_{3,3}$. Det er lettest å innse dette hvis vi først gir hjørnene i grafen navn:



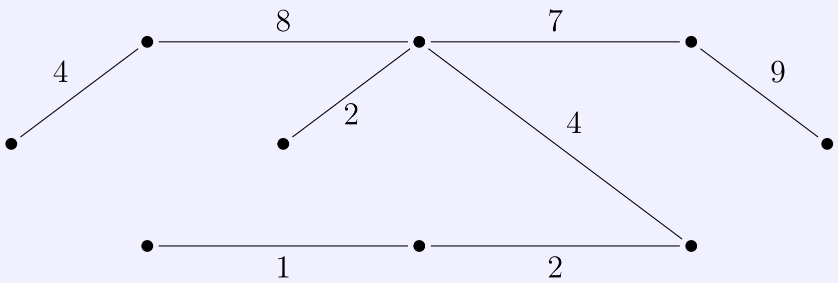
Det er klart at følgende undergraf er homeomorf med $K_{3,3}$.



Oppgave 6 Finn et minimalt utspennende tre for den følgende vektede grafen ved å bruke enten Prims eller Kruskals algoritme. Oppgi i tillegg vekten av treet du finner og hvilken av algoritmene du har brukt.



Begge algoritmene er beskrevet både på forelesning og i læreboka. Vi nøyer oss her med å tegne et minimalt utspennende tre. Det har total vekt lik 37.



Merk: Dette er ikke det eneste minimale utspennende treet.

Oppgave 7

a) Hva menes med en relasjon på en mengde? Forklar hva som menes med at en relasjon er refleksiv; transitiv; symmetrisk; antisymmetrisk. Hvilke av disse egenskapene definerer en delvis ordning?

Dette er en oppgave som kun spør etter definisjoner - slikt finnes i læreboken.

b) La F betegne mengden av funksjoner $\mathbb{Z}^+ \to \mathbb{R}$. Definer relasjonen $\leq_{\mathcal{O}}$ på F ved

$$f \leq_{\mathcal{O}} g \Leftrightarrow \mathcal{O}(f) \subseteq \mathcal{O}(g).$$

Er $\leq_{\mathcal{O}}$ en delvis ordning? (Hint: Undersøk om $\leq_{\mathcal{O}}$ er antisymmetrisk. Husk at to funksjoner $f, g \in F$ er *like*, og vi skriver $f = g$, hvis $f(n) = g(n)$ for hver $n \in \mathbb{Z}^+$.)

Hvis vi kan vise at $\leq_{\mathcal{O}}$ ikke er antisymmetrisk, så er $\leq_{\mathcal{O}}$ ikke en delvis ordning. Det er lett å finne et eksempel som gjør nytten. La for eksempel $f(n) = n$ og $g(n) = n+1$. Da er det klart at en funksjon i F er dominert av f hvis og bare hvis den er dominert av g. Det betyr at $\mathcal{O}(f) = \mathcal{O}(g)$, altså $\mathcal{O}(f) \subseteq \mathcal{O}(g)$ og $\mathcal{O}(g) \subseteq \mathcal{O}(f)$. (På forelesning har vi vist at hvis $p \in F$ er et hvilket som helst polynom av grad t, så er $\mathcal{O}(p) = \mathcal{O}(n^t)$). Dermed er både $f \leq_{\mathcal{O}} g$ og $g \leq_{\mathcal{O}} f$. Men samtidig er det klart at $f \neq g$. Det betyr at $\leq_{\mathcal{O}}$ ikke er antisymmetrisk, og dermed heller ikke en delvis ordning.