NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgave i
MA0301 Elementær diskret matematikk – løsningsforslag

Faglig kontakt under eksamen: Martin Strand

Tlf: 970 27 848

Eksamensdato: . august 2014

Eksamenstid (fra–til): 09:00–13:00

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: D: Ingen trykte eller håndskrevne hjelpemidler tillatt. Bestemt, enkel kalkulator tillatt.

Annen informasjon:
Alle svar skal begrunnes. Ta med så mye mellomregning og forklaring at det er enkelt å forstå hvordan du har tenkt.

Oppgavesettet består av ti punkter, og hvert punkt teller like mye.

Målform/språk: bokmål

Antall sider: 5

Antall sider vedlegg: 0

Kontrollert av:

Dato Sign

Oppgave 1

a) Hva er koeffisienten foran x^3y^4 hvis du skriver ut $(x-y)^7$?

Løsning. Vi bruker binomialteoremet. Koeffisienten blir da $\binom{7}{3}(-1)^4 = \binom{7}{4}(-1)^4 = 35$. □

b) En vennegjeng på sju skal sette seg ved et rundt bord med sju stoler. Om vi tar hensyn til de følgende forutsetningene, hvor mange mulige plasseringer er det rundt bordet?

- To av dem er nylig blitt kjærester, og vil alltid sitte ved siden av hverandre, men den interne rekkefølgen for de to er uten betydning.
- Fordi bordet er rundt, har rotasjonen ingenting å si: Plasseringen 1-2-3-4-5-6-7 er for eksempel den samme som 2-3-4-5-6-7-1.

Løsning. Fordi kjærestene vil sitte sammen, kan vi betrakte dem som én person i stedet for to, men så må vi til slutt gange med to fordi det er to mulige interne plasseringer av dem.

Det er i utgangspunktet 6! måter å plassere seks personer ved et bord. Fordi rotasjonen ikke betyr noe, kan vi alltid anta at den første setter seg på en plass merket én, og deretter skal de andre plasseres, så altså $5! = \frac{6!}{6}$. Vi måtte gange med to, så det totale antall plasseringer blir

$$\frac{2 \cdot 6!}{6} = 2 \cdot 5! = 240.$$

□

Oppgave 2 La A og B være mengder i et univers $\mathcal{U}$. Bruk regnereglene for å vise at

$$\Big((A \cap B) \cup \overline{(\overline{A} \cup B)}\Big) \cap A = A.$$

Løsning.

$$\begin{aligned}
\Big((A\cap B)\cup\overline{(\overline{A}\cup B)}\Big)\cap A &= \Big((A\cap B)\cup(\overline{\overline{A}}\cap\overline{B})\Big)\cap A\\
&= \Big((A\cap B)\cup(A\cap\overline{B})\Big)\cap A\\
&= \Big(A\cap(B\cup\overline{B})\Big)\cap A\\
&= (A\cap(\mathcal{U})\,)\cap A\\
&= A
\end{aligned}$$

□

Oppgave 3 Bruk matematisk induksjon for å vise at

$$\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = 1+3+5+\cdots+(2n-1) = n^2$$

holder for alle positive heltall n.

Løsning. Basistilfellet er greit, for $1 = 1^2$. Anta nå at det holder for et vilkårlig heltall k, og se på tilfellet for $k+1$.

Da er

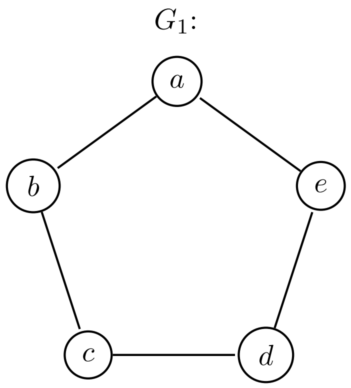
$$\begin{aligned}
1+3+5+\cdots+(2k-1)+(2(k+1)-1) &= k^2+2(k+1)-1\\
&= k^2+2k+1 = (k+1)^2
\end{aligned}$$

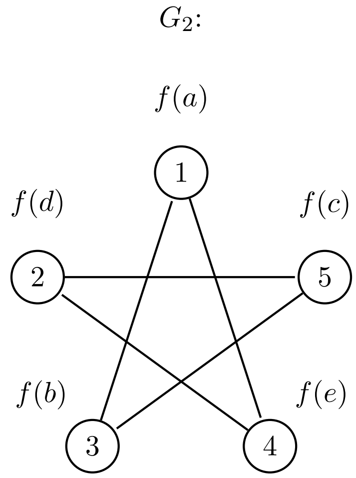
som vi ønsket å vise. Ved induksjon holder da påstanden for alle positive heltall. □

Oppgave 4 Finn en isomorfi f mellom disse to grafene. La $f(a) = 1$.

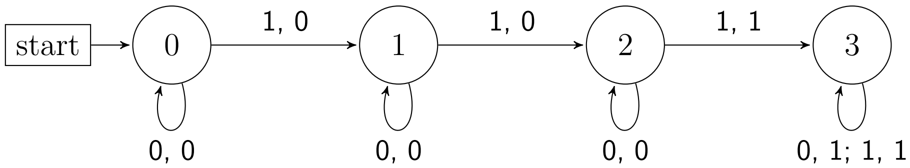
Løsning. Det er to mulige isomorfier som har $f(a) = 1$. De kan sees på som å følge rotasjonen hver sin vei, så bare den ene blir oppgitt: $f(a) = 1, f(b) = 3, f(c) = 5, f(d) = 2, f(e) = 4$. Man kan da verifisere at dette er en isomorfi ved å sjekke at kantene stemmer overens. □

Oppgave 5 Lag en endelig tilstandsmaskin som gjenkjenner alle strenger som inneholder minst tre enere, men ikke nødvendigvis på rad. Alfabetet er $\{0,1\}$.





Løsning. Den enkleste ideen for å løse denne er å telle: Vi trenger tilstander som husker at det har kommet henholdsvis 0, 1, 2 og 3 enere. For hver ener som leses går man opp en tilstand, ellers venter man bare der man er. Når man har kommet til tilstand 3 godtas alt, og man blir værende der.

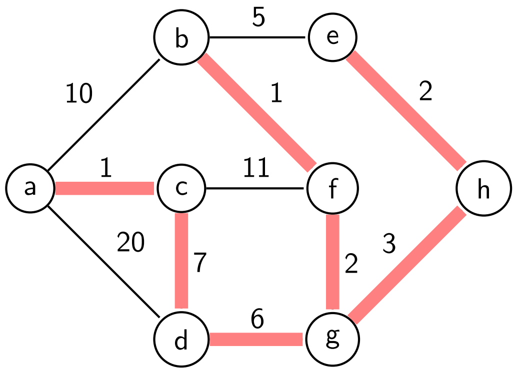


□

Oppgave 6 Bruk Kruskals algoritme eller Prims algoritme for å finne et minimalt utspennende tre for grafen under. Oppgi hvilken algoritme du bruker, den totale vekten av treet, og den sjette kanten som blir lagt til i treet. For Prims algoritme skal du starte i a.

Løsning. Se figuren for det minimale utspennende treet. For Prims algoritme er den sjette kanten (g, h). For Kruskals algoritme er den sjette kanten (d, g). Den totale vekten er 22. □

Oppgave 7 La $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være funksjonen gitt ved $f(x) = 5x + 3$. Vis at f er en bijeksjon (altså injektiv/en-til-en og surjektiv/på), og finn den inverse funksjonen til f.



Løsning. Injektiv: Anta at $f(x_1) = f(x_2)$, altså at $5x_1 + 3 = 5x_2 + 3$. Da er det lett å se at $x_1 = x_2$.

Surjektiv: La y være et tall i verdimengden. Vi må da finne en x i definisjonsmengden slik at $y = 5x + 3$. Det er det samme som å løse en ligning, nemlig at $x = \frac{y-3}{5}$.

Ligningen over gir også den inverse funksjonen: $f^{-1}(x) = \frac{x-3}{5}$. Vi sjekker at det faktisk er en invers: $f(f^{-1}(x)) = 5\frac{x-3}{5} + 3 = x = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$. □

Oppgave 8 La M være en mengde, og se på potensmengden $\mathcal{P}(M)$, som inneholder alle delmengder av M. La A og B være delmengder av M, altså at $A, B \in \mathcal{P}(M)$. Vi betrakter $\subseteq$ som en relasjon på $\mathcal{P}(M)$ på den vanlige måten: $A \subseteq B$ dersom A er inneholdt i B.

a) Vis at $\subseteq$ er en delvis ordning for alle mengder M.

Løsning. Vi trenger å vise antisymmetri, transitivitet og refleksivitet. La A, B og C være delmengder av M.

Antisymmetrisk: Hvis $A \subseteq B$ og $B \subseteq A$, så er $A = B$

Transitiv: Anta $A \subseteq B$ og $B \subseteq C$. Ta en x i A. Da er x også i B, og dermed i C. Det betyr at $A \subseteq C$.

Refleksiv: Per definisjon gjelder $A \subseteq A$ for enhver mengde A.

Det er ikke så mye å gjøre på denne oppgaven, men den tester oversikt over pensum, og ta du kan håndtere flere begreper samtidig. □

b) Finn et moteksempel som viser at $\subseteq$ ikke er en fullstendig ordning.

Løsning. For at en relasjon skal være en fullstendig ordning, må alle elementer være sammenlignbare. Ta $M = \{1, 2, 3\}$ Da er både $\{1\}$ og $\{2\}$ delmengder av M, men vi har verken $\{1\} \subseteq \{2\}$ eller $\{2\} \subseteq \{1\}$. $\square$