NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Institutt for datateknikk og informasjonsvitenskap

Eksamensoppgave i TDT4125 Algoritmekonstruksjon

Faglig kontakt under eksamen	Magnus Lie Hetland
Telefon	918 51 949

Eksamensdato	14. mai, 2018
Eksamenstid (fra–til)	09:00–13:00
Hjelpemiddelkode/tillatte hjelpemidler	D

Målform/språk	Bokmål
Antall sider (uten forside)	2
Antall sider vedlegg	0

Informasjon om trykking av eksamensoppgave

Originalen er

1-sidig	☑	**2-sidig**	☐
sort/hvit	☑	**i farger**	☐

Skal ha flervalgskjema ☐

Kvalitetssikret av	Pål Sætrom
Kontrollert av	

Dato Sign

Merk: Studenter finner sensur i Studentweb. Har du spørsmål om din sensur må du kontakte instituttet ditt. Eksamenskontoret vil ikke kunne svare på slike spørsmål.

Les dette nøye

(i) Les hele eksamenssettet nøye *før* du begynner!

(ii) Faglærer går normalt én runde gjennom lokalet. Ha evt. spørsmål klare!

Merk: Varianter av de foreslåtte svarene nedenfor vil naturligvis også kunne gis uttelling, i den grad de er helt eller delvis korrekte.

Oppgaver med løsninger

(5%) 1. I programpakker for å løse lineære program med heltallsvariable konstrueres ofte en relaksering i form av et lineært program der heltallsrestriksjonene fjernes. Anta at du har en optimal løsning på denne relakseringen. Om du ønsker å gi en garanti for hvor langt unna det faktiske heltallsoptimum du er, uten nødvendigvis å finne et slikt optimum, hva trenger du i tillegg? Forklar kort.

En gyldig løsning, slik at man får både en optimistisk og en konservativ verdi for målfunksjonen. Evt. kan man vite *the integrality gap* for programmet.

(5%) 2. Hva er forskjellen på *slice-wise polynomial* (XP) og *fixed-parameter tractable* (FPT)? Forklar kort.

(5%) 3. Hva er forskjellen på onlinealgoritmer og strømmealgoritmer? Forklar kort.

(5%) 4. Sett opp et heltallsprogram for minimalt vektet mengdedekke (*minimum-weight set cover*).

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & \sum_{j=1}^{m} w_j x_j && && (1)\\ \text{subject to} \quad & \sum_{j:e_i \in S_j} x_j \geq 1, && i = 1, \ldots, n, && (2)\\ & x_j \in \{0,1\}, && j = 1, \ldots, m. && (3) \end{aligned}$$

(5%) 5. La $M = (E, S)$ være et uavhengighetssystem (*independence system*). Det følgende er et vanlig aksiom for å karakterisere M som en matroide. Hva er det som mangler?

For $J, K \in S$ med $|J| = |K| + 1$ finnes det alltid en $a \in J \setminus K$ slik at $K \cup \{a\} \in S$.

(6%) 6. Forklar kort hvordan man med en strømmealgoritme kan avgjøre om en graf gitt av en grafstrøm (*graph stream*) er bipartitt.

(6%) 7. Diskutér kort forskjeller mellom å beregne et minimalt spenntre (*minimum spanning tree*) med en onlinealgoritme og med en strømmealgoritme.

(7%) 8. Om du løser LP-relakseringen av heltallsprogrammet for minimalt vektet mengdedekke (slik det er beskrevet i pensum) og så runder opp primalvariable med stramme dualrestriksjoner, så får du en f-approksimasjon, der f er høyeste frekvens (antall mengder et element forekommer i). Forklar kort hvorfor løsningen blir gyldig og hvorfor ytelsesgarantien blir f.

(7%) 9. Hvordan fungerer «de betingede forventningers metode» (*method of conditional expectations*) og hva brukes den til? Hva slags garantier kan den gi? Forklar kort.

(7%) 10. Forklar kort hvorfor ingen kjente algoritmer gir en $\frac{3}{2}$-approksimasjon for det generelle handelsreisendeproblemet.

(8%) 11. Forklar kort hvorfor Christofides' algoritme gir er en $\frac{3}{2}$-approksimasjon for det metriske handelsreisendeproblemet.

En *kantdominerende mengde* i en graf $G = (V, E)$ er en kantmengde $D \subseteq E$ slik at for enhver kant $e_1 \in E \setminus D$ så finnes det en kant $e_2 \in D$ der e_1 og e_2 er naboer (dvs., deler en node). En *matching* i G er en mengde $M \subseteq E$ der ingen av kantene deler noder.

En kantdominerende mengde er *minimal* dersom vi ikke kan fjerne noen kanter og fortsatt ha en kantdominerende mengde. En matching er *maksimal* dersom vi ikke kan legge til noen kanter og fortsatt ha en matching.

(7%) 12. Gitt en graf G og en minimal kantdominerende mengde D i G skal du konstruere en maksimal matching M i G slik at $|D| = |M|$. Beskriv kort hvordan du ville gjøre dette.

For et nabopar $uv, vw \in D$, la S være w sine nabokanter unntatt vw. D og S kan ikke overlappe, og $D \setminus \{vw\}$ kan ikke dominere S, siden vi da kunne ha fjernet vw. Det må altså finnes en kant $wz \in S$ som bare domineres av vw i D. Vi bytter vw med wz, og har redusert antall nabopar med én. Vi fortsetter slik til vi ikke har noen nabopar i D, og D er en matching. D dominerer fortsatt $E \setminus D$, så vi har da en maksimal matching.

(8%) 13. Du ønsker å finne en maksimal matching med så få kanter som mulig. Beskriv en 2-approksimasjon, og forklar kort hvorfor ytelsesgarantien blir 2.

Finn en maksimal matching M, f.eks. grådig (legg til én og én vilkårlig lovlig kant). En minst mulig maksimal matching må dekke minst halvparten av nodene til M, ellers kunne den utvides. Dermed kan M maksimalt ha dobbelt så mange kanter.

(9%) 14. Du planlegger en reiserute på en vektet, rettet graf, der hver kant er merket med én av flere mulige landskapstyper (fjell, skog, tettbebyggelse, etc.). Du ønsker å finne en sti som er så lang som mulig, men du vil besøke hver by (node) og hver landskapstype maksimalt én gang. For å sikre at du finner en løsning, tillater du helikopterturer mellom byer. Disse har ingen lengde (vekt), og ingen landskapstype. Du prøver deg på en grådig løsning, der du hele tiden legger til den lengste kanten som passer inn i planen din så langt (evt. med flere helikopterturer, for å få det til å gå opp). Hva kan du si om ytelsesgarantien α? Forklar.

Dette er en utvidelse av oppgave 5.4.10 hos Jungnickel. Der har man oppgitt en rettet graf G og skal finne tre matroider slik at hver rettet hamiltonsti i G er en uavhengig mengde med maksimal kardinalitet i snittet av de tre matroidene. En grådig løsning vil ikke nødvendigvis gi en hamiltonsti, men siden vi har snittet av tre matroider (den grafiske matroiden, hodepartisjonen og halepartisjonen), så vil vi kunne garantere $\alpha = \frac{1}{3}$ for maksimale uavhengige mengder. I oppgaven over er det innført en fjerde matroide, der de uavhengige mengdene består av kanter med ulike landskapstyper. (Det er ganske lett å vise at dette er en matroide, en såkalt *transversalmatroide*. F.eks., om én uavhengig mengde er større enn en annen, så må den største inneholde minst én landskapstype som ikke er brukt i den minste.) Vi har nå snittet av fire matroider, og får $\alpha = \frac{1}{4}$.

(10%) 15. Du vil finne en sykelkritisk nodemengde (*feedback vertex set*) $X \subseteq V$ i en (urettet) graf $G = (V, E)$, der $|X| \leq k$. Anta at G er *regulær*, dvs. at alle noder i G har samme kantgrad (antall nabokanter). Beskriv en kjerne (*kernel*) bestående av $O(k)$ noder for dette problemet.