TDT4125 Algoritmekonstruksjon

Eksamen, 6. juni 2023, 15:00–19:00

Faglig kontakt	Magnus Lie Hetland
Hjelpemiddelkode	E

Løsningsforslag

Løsningsforslagene i rødt nedenfor er *eksempler* på svar som vil gi full uttelling. Det vil ofte være helt akseptabelt med mange andre, beslektede svar, spesielt der det bes om en forklaring eller lignende. Om du svarte noe litt annet, betyr ikke det nødvendigvis at du svarte feil!

1 Hva er forskjellen på flyt (*flow*) og preflyt (*preflow*)?

> Her forventes kun en kort forklaring av forskjellene.

2 Forklar kort hvordan Christofides' algoritme fungerer.

> Her forventes en forklaring av kombinasjonen av spenntre og matching, bruken av trekantulikheten og hvordan det gir ytelsesgaranti 1.5.

3 Hva er onlinealgoritmer, og hva er ytelsesgarantien (*competetive ratio*) vi bruker for å beskrive dem?

> Her forventes en kort forklaring av typen problemer som løses, med inkrementell input som krever inkrementelle beslutninger, og at ytelsesgarantien sammenligner med en optimal offlinealgoritme.

4 Forklar kort metoden for derandomisering som er beskrevet i pensum.

> Her forventes en kort forklaring av *the method of conditional expectations*.

5 Ved (énsidig) tilnærmet komplementær slakkhet, har vi følgende:

- Hvis en primalvariabel er positiv, er tilsvarende dualrestriksjon stram (oppfylt ved likhet).
- Hvis en dualvariabel er positiv, er tilsvarende primalrestriksjon en faktor α unnå å være stram (oppfylt ved likhet).

Forklar kort hvorfor dette gir oss en α-approksimasjon.

> Her kan man f.eks. bruke en lignende fremstilling som i forelesningene, der man får $cx \leqslant yAx \leqslant yb\alpha$, som gir $cx/yb \leqslant \alpha$.
>
> En variant som ligner med på fremstillingen i kompendiet er også naturligvis akseptabel.

6 En dominerende kantmengde (eller kant-dominerende mengde, *edge dominating set*) for en graf $G = (V, E)$ er en kantmengde $D \subseteq E$ som er slik at hver av kantene i $E \setminus D$ er nabo med minst én av kantene i D. Vi ønsker å finne en så liten dominerende kantmengde som mulig.

Konstruer en approksimasjonsalgoritme for problemet. Hva blir ytelsesgarantien (α)?

Hint: En minste dominerende kantmengde har like mange kanter som en minste maksimal (dvs., ikke utvidbar) matching.

> Enhver maksimal (ikke utvidbar) matching vil være en dominerende kantmengde, og vi kan enkelt finne en slik i lineær tid.
>
> Vi vet (f.eks.) at en maksimal matching er en 1/2-approksimasjon for en maksimum matching (også maksimal), som betyr at ingen maksimal matching kan ha mer enn 2 ganger så mange kanter som noen annen.
>
> Det betyr igjen at en maksimal matching ikke kan ha mer enn 2 ganger så mange kanter som den minste dominerende kantmengden (jf. hintet i oppgaven), som gir oss $\alpha = 2$.
>
> Om man får en dårligere α, vil det også kunne gi uttelling.

7 En linjegraf (*line graph*) $L(G)$ er det man får om man bytter ut hver kant i G med en node, og lar disse nodene være naboer dersom de tilsvarende kantene var nabokanter. Å avgjøre om en linjegraf har en dominerende nodemengde (*dominating set*) av størrelse maks k er NP-komplett.

Vis at å avgjøre om en graf (ikke nødvendigvis en linjegraf) har en dominerende kantmengde (se oppg. 6) av størrelse maks k er NP-komplett.

Relativt direkte reduksjon: Vi får oppgitt en linjegraf $L(G)$ og k. Linjegrafen har en dominerende nodemengde hvis og bare hvis den underliggende grafen G har en dominerende kantmengde.

Her kan man gjerne forklare litt mer om hvorfor dette er tilfelle – dvs., at en dominerende nodemengde i $L(G)$ mappes direkte til en dominerende kantmengde i G, og omvendt.

8 En fargelegging av en graf $G = (V, E)$ er en tilordning av en farge til hver node i V, slik at for hver kant $uv \in E$, så har u og v forskjellige farger.

Problemet vi ønsker å løse er å avgjøre om en graf kan fargelegges med 3 farger.

Anta at du får oppgitt et nodedekke S for G, der $|S| = k$. Beskriv hvordan vi kan finne en problemkjerne (*kernel*) som er av polynomisk størrelse som funksjon av k. Hvor stor blir kjernen? Hvorfor blir den korrekt?

Hint: Hvis en node i $V \setminus S$ ikke kan få noen gyldig farge, er det fordi tre av naboene i S har forskjellige farger. Hvis disse tre har flere felles naboer i $V \setminus S$, så kan ingen av dem få gyldig farge heller.

Vi kan bruke følgende prosedyre:

```
1  for alle tripler u, v, w ∈ S
2        merk en felles nabo x ∈ V \ S, om det finnes noen
3  slett umerkede noder fra V \ S
```

Dette gir oss k noder fra S, og $O(k^3)$ noder fra $V \setminus S$, altså $O(k^3)$ totalt. Vi har $O(k^2)$ kanter i S og $O(k \times k^3) = O(k^4)$ mellom S og $V \setminus S$, altså $O(k^4)$ totalt.

Den nye grafen G' er naturligvis fortsatt 3-fargbar, om G er det.

La oss si G' er 3-fargbar. Alle andre noder i G kan da få en farge annerledes enn sine naboer (som er i S, og som har fått en farge).

Den eneste måten dette kunne feile på, er om en ufarget node x har naboer u, v og w med ulike farger. Men siden disse uansett har minst én fargelagt felles nabo i $V \setminus S$, kan ikke dette skje.

Her er det mulig å komme ned i $O(k^2)$ noder og kanter, men det krever litt ekstra maskineri.

9 La (E, S) og (F, T) være matroider, der $E \cap F = \emptyset$. Vis at $(E \cup F, \{X \cup Y : X \in S, Y \in T\})$ er en matroide.

Her kan man bare bruke en av de mange definisjonene av en matroider, og argumentere for at den må gjelde. F.eks. kan man bruke egenskapen at alle maksimale uavhengige delmengder for enhver delmengde av grunnmengden må ha samme kardinalitet. Dette gjelder for begge matroidene, og det følger direkte at kardinaliteten til de maksimale delmengdene av en delmengde av $(A \cup B) \subseteq (E \cup F)$, der $A \subseteq E$ og $B \subseteq F$, blir summen av de tilsvarende verdiene for A og B.

10 Du har oppgitt en sammenhengende, vektet, urettet graf $G = (V, E)$, med vektfunksjon $w : E \to R_{\geqslant 0}$, en delmengde $S \subseteq V$ og et positivt heltall k. Ingen av nodene i S er naboer, dvs., for alle $u, v \in S$, $uv \notin E$. Du ønsker å koble sammen alle nodene i grafen, med så få kanter som mulig. Ingen av nodene i S får være nabo med mer enn k av kantene i løsningen. Gitt disse kravene, så vil du maksimere vekten til løsningen.

Diskuter kort eksakt og approksimert løsning av dette problemet.

Dette er snittet av to matroider. Det ene er den grafiske matroiden over G, som kobler sammen alle nodene med så få kanter som mulig. Det andre er en *partisjonsmatroider*: Hver av nodene i S tilsvarer én av et sett med ikke-overlappende kantmengder, der vi maks får ha med k kanter (uniforme matroider), og ev. gjenværende kanter utgjør en mengde uten slike restriksjoner (også en uniform matroide, men i praksis en fri matroide).

Man kan ev. forklare at partisjonsmatroiden er den disjunkte unionen av $|S| + 1$ matroider, som gir en matroide, jf. oppg. 9.