TDT4125 Algoritmekonstruksjon

Eksamen, 6. juni 2023, 15:00–19:00

Faglig kontakt Magnus Lie Hetland
Hjelpemiddelkode E

Oppgaver

1 Hva er forskjellen på flyt (*flow*) og preflyt (*preflow*)?

2 Forklar kort hvordan Christofides' algoritme fungerer.

3 Hva er onlinealgoritmer, og hva er ytelsesgarantien (*competetive ratio*) vi bruker for å beskrive dem?

4 Forklar kort metoden for derandomisering som er beskrevet i pensum.

5 Ved (énsidig) tilnærmet komplementær slakkhet, har vi følgende:

- Hvis en primalvariabel er positiv, er tilsvarende dualrestriksjon stram (oppfylt ved likhet).
- Hvis en dualvariabel er positiv, er tilsvarende primalrestriksjon en faktor α unnå å være stram (oppfylt ved likhet).

Forklar kort hvorfor dette gir oss en α-approksimasjon.

6 En dominerende kantmengde (eller kant-dominerende mengde, *edge dominating set*) for en graf $G = (V, E)$ er en kantmengde $D \subseteq E$ som er slik at hver av kantene i $E \setminus D$ er nabo med minst én av kantene i D. Vi ønsker å finne en så liten dominerende kantmengde som mulig.

Konstruer en approksimasjonsalgoritme for problemet. Hva blir ytelsesgarantien (α)?

Hint: En minste dominerende kantmengde har like mange kanter som en minste maksimal (dvs., ikke utvidbar) matching.

7 En linjegraf (*line graph*) $L(G)$ er det man får om man bytter ut hver kant i G med en node, og lar disse nodene være naboer dersom de tilsvarende kantene var nabokanter. Å avgjøre om en linjegraf har en dominerende nodemengde (*dominating set*) av størrelse maks k er NP-komplett.

Vis at å avgjøre om en graf (ikke nødvendigvis en linjegraf) har en dominerende kantmengde (se oppg. 6) av størrelse maks k er NP-komplett.

8 En fargelegging av en graf $G = (V, E)$ er en tilordning av en farge til hver node i V, slik at for hver kant $uv \in E$, så har u og v forskjellige farger.

Problemet vi ønsker å løse er å avgjøre om en graf kan fargelegges med 3 farger.

Anta at du får oppgitt et nodedekke S for G, der $|S| = k$. Beskriv hvordan vi kan finne en problemkjerne (*kernel*) som er av polynomisk størrelse som funksjon av k. Hvor stor blir kjernen? Hvorfor blir den korrekt?

Hint: Hvis en node i $V \setminus S$ ikke kan få noen gyldig farge, er det fordi tre av naboene i S har forskjellige farger. Hvis disse tre har flere felles naboer i $V \setminus S$, så kan ingen av dem få gyldig farge heller.

9 La (E, S) og (F, T) være matroider, der $E \cap F = \emptyset$. Vis at $(E \cup F, \{X \cup Y : X \in S, Y \in T\})$ er en matroide.

10 Du har oppgitt en sammenhengende, vektet, urettet graf $G = (V, E)$, med vektfunksjon $w : E \to R_{\geqslant 0}$, en delmengde $S \subseteq V$ og et positivt heltall k. Ingen av nodene i S er naboer, dvs., for alle $u, v \in S$, $uv \notin E$. Du ønsker å koble sammen alle nodene i grafen, med så få kanter som mulig. Ingen av nodene i S får være nabo med mer enn k av kantene i løsningen. Gitt disse kravene, så vil du maksimere vekten til løsningen.

Diskuter kort eksakt og approksimert løsning av dette problemet.