TDT4125 Algoritmekonstruksjon

Eksamen, 6. juni 2024, 09:00–13:00

Faglig kontakt	Magnus Lie Hetland
Hjelpemiddelkode	E

Oppgaver

1 Hva er dualen til følgende lineærprogram?

$$\begin{array}{lrl} \max & 2x_1 + 3x_2 & \\ \text{s.t.} & x_1 + x_2 \leqslant 4\,, & \\ & 2x_1 + x_2 \geqslant 5\,, & \\ & x_2 \geqslant 0\,. & \end{array}$$

2 Forklar Hopcroft–Karp med egne ord.

3 Forklar den ungarske metoden, og hvordan den kan ses på som en versjon av (eller forløper til) primal–dual-metoden.

4 I ryggsekkproblemet (*the knapsack problem*) har man oppgitt vekt og verdi for hver av et sett med gjenstander, samt en kapasitet (maksimal totalvekt) for ryggsekken. Man ønsker å velge en delmengde av gjenstandene som maksimerer den totale verdien, uten å gå over kapasiteten. (Du kan anta at alle gjenstandene får plass i ryggsekken hver for seg.)

Én strategi er å sortere gjenstandene (synkende) etter verdi per vekt, og så velge gjenstander grådig. På et punkt kommer man til en gjenstand man ikke får plass til. Hvis man har lov til å dele opp denne gjenstanden (*fractional knapsack*), vil man da ende med en optimal løsning, men anta at du ikke får lov til det (*0-1 knapsack*). Vurder da følgende to strategier:

Strategi 1: Dropp gjenstanden, og let videre etter gjenstander som får plass (om noen).

Strategi 2: Enten dropper du gjenstanden, eller så tar du den med, og dropper heller alle gjenstander du hadde valgt så langt. Velg det alternativet som gir høyest verdi. Etter dette, fortsetter du grådig, som i strategi 1.

Diskuter de to strategiene. Hva kan du si om ytelsesgarantiene (*performance guarantees*) deres som approksimasjonsalgoritmer?

Merk at det her *ikke* er snakk om *the minimum knapsack problem*, som er diskutert i pensum. Du kan anta at vekter, verdier og kapasitet er positive heltall.

5 Diskuter forskjeller og likheter mellom ytelsesgarantiene vi gir for vanlige approksimasjonsalgoritmer og for onlinealgoritmer (dvs., *approximation ratio* vs. *competitive ratio*).

6 I pensum beskrives en 1/2-approksimasjonsalgoritme for MAX CUT. Det nevnes også at denne algoritmen kan derandomiseres. Forklar kort hvordan dette kan gjøres ved å bruke metoden for betingede forventninger (*the method of conditional expectations*).

7 Du skal løse en versjon av mengdedekkeproblemet (*the set cover problem*), der hvert element har oppgitt hvor mange mengder det minst må dekkes av. (I den vanlige utgaven av problemet, er dette antallet 1 for alle elementer.)

Hvis du følger strategien fra pensum, der du løser dette som et lineærprogram uten heltallsrestriksjoner, og runder opp primalvariable der dualrestriksjonene er stramme, hva blir ytelsesgarantien? Forklar ved hjelp av tilnærmet komplementær slakkhet (*approximate complementary slackness*).

8 I en versjon av ryggsekkproblemet er gjenstandene plasert i en sekvens, og hver gjenstand har en *farge* i stedet for en verdi. Du ønsker nå å avgjøre om det er mulig å få med seg et sett med gjenstander slik at blant dem som *er igjen*, så ligger alle gjenstander av samme farge ved siden av hverandre. (Etter at man har tatt med seg gjenstander, skal altså de m gjenværende gjenstandene av en gitt farge ligge på indekser $i, i+1, i+2, \dots, i+m-1$, for en eller annen i.)

Gjenstandene har fortsatt også en vekt, og ryggsekken har en kapasitet (en maksimal totalvekt den kan bære).

Beskriv en polynomisk problemkjerne (*kernel*) for dette problemet, der kapasiteten er parameteren.

9 En *partisjonsmatroide* er et mengdesystem $\mathrm{M} = (\mathrm{E}, \mathrm{S})$ der E er partisjonert i k *kategorier* $\mathrm{E}_1, \mathrm{E}_2, \dots, \mathrm{E}_k$, og hver kategori E_i har en terskel t_i. En delmengde $\mathrm{X} \subseteq \mathrm{E}$ er uavhengig (dvs., $\mathrm{X} \in \mathrm{S}$) når $|\mathrm{S} \cap \mathrm{E}_i| \leqslant t_i$ for alle i.

Vis at en partisjonsmatroide faktisk er en matroide.

10 Du organiserer en konferanse, og skal fordele plasser til ulike foredrag, der noen går samtidig. (Dvs., foredrag overlapper enten ikke, ellers så starter og slutter de samtidig.)

Du kan anta at alle deltakerne er enige om hvor bra de de ulike foredragene er, og at dette er representert ved en positiv verdi for hvert foredrag.

Du ønsker å fordele plassene rettferdig, og innfører derfor følgende regel: Hver agent får maksimalt én plass til et foredrag fra de k beste, deretter maksimalt én plass til et foredrag fra de k nest beste, osv.

Gitt denne regelen, vil du maksimere den totale verdien av foredragene som blir valgt. I første omgang begrenser du deg til å se på én av deltakerne. Hvor nært optimum kommer du om du velger grådig? Hva kan du si om en ev. polynomisk algoritme?

Husk at en deltaker ikke kan delta i to foredrag som går samtidig.