NTNU
Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet

Fakultet for informasjonsteknologi, matematikk og elektroteknikk

Institutt for datateknikk og informasjonsvitenskap

KONTINUASJONSEKSAMEN I FAG SIF8043 BILDETEKNIKK LØRDAG 16. AUGUST 2003 KL. 09.00 – 14.00

Løsningsforslag - grafikk

OPPGAVE 1 Grafikk – Affine transformasjoner (30 poeng)

a) Skriv opp den generelle formen som matriser for affine transformasjoner antar. (Hvilke matriseelementer kan være forskjellige fra 0?) Vi forutsetter 3D.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Det viktige er at: $a_{41} = a_{42} = a_{43} = 0$

b) Nevn eksempler på affine transformasjoner og transformasjoner som ikke er affine. Hvilke av disse transformasjonene bevarer vinkler og hvilke bevarer parallellitet?

Affine transformasjoner:
- Translasjon
- Skalering
- Rotasjon

Ikke affin transformasjon:
- Perspektivtransformasjonen

Bevarer vinkler:
- Translasjon
- Rotasjon

Bevarer parallellitet:
- Translasjon
- Skalering
- Rotasjon

c) I et gitt tilfelle kjenner vi koordinatene til en del punkter før og etter en transformasjon i 3D. Vi vet at transformasjonen er affin. Men for øvrig kjenner vi ikke til hvordan transformasjonsmatrisen er bygd opp. Ved å utnytte den kjente sammenhengen mellom punktenes koordinater før og etter transformasjonen, kan vi finne alle elementene i matrisen.

Spørsmålet er:

Hvor mange av punktene må du bruke for å kunne beregne alle matriseelementene og hvordan beregner du dem?

Matrisen har 12 elementer som alle er ukjente. Hvert av punktene, som representeres ved 3 koordinater *x*, *y* og *z*, gir når matrisen anvendes på dem, 3 likninger. For å få de nødvendige 12 likningene, må vi da ta i bruk 4 av punktene. Men det er ikke likegyldig hvilke punkter som velges. For å unngå singulariteter i likningssettet, må vi passe på at:

- Tre og tre av punktene ikke er kolineære
- De fire punktene ikke ligger i et felles plan

Likningssettet å løse, blir:

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_j + a_{12}y_j + a_{13}z_j + a_{14} &= u_j \\
a_{21}x_j + a_{22}y_j + a_{23}z_j + a_{24} &= v_j \qquad j = 1,2,3,4 \\
a_{31}x_j + a_{32}y_j + a_{33}z_j + a_{34} &= n_j
\end{aligned}
$$

der *x*, *y* og *z* er punktets koordinater før transformasjonen og *u*, *v* og *n* er koordinatene etter transformasjonen.

OPPGAVE 2 Grafikk – Transformasjoner (75 poeng)

Gitt et objekt **C** med tre markeringspunkter P_1, P_2 og P_3 som ikke er kolineære. I rommet der objektet befinner seg, er det også tre ikke kolineære markeringspunkter Q_1, Q_2 og Q_3. Objektet **C** skal transformeres slik at P_1 faller sammen med Q_1, P_2 faller sammen med Q_2 og P_3 faller sammen med Q_3. Vi går ut fra at vinkelen mellom vektoren P_2 - P_1 og vektoren P_3 - P_1 er lik vinkelen mellom vektoren Q_2 - Q_1 og vektoren Q_3 - Q_1. Vi går også ut fra at:

(1) $$\frac{|P_2 - P_1|}{|Q_2 - Q_1|} = \frac{|P_3 - P_1|}{|Q_3 - Q_1|} = k$$

Sett opp alle matrisene som skal til for å realisere den spesifiserte transformasjonen i rett rekkefølge. Alle matriseelementene skal spesifiseres ved hjelp av koordinatene til de spesifiserte punktene og andre størrelser angitt i oppgaven.

Tips: Du vil spare deg mye arbeid ved å utnytte egenskapene til ortogonale matriser ved behandlingen av rotasjoner i denne oppgaven, men oppgaven kan også løses på andre måter.

En plan for å realisere transformasjonen kan være:

1. Translasjon slik at P_1 faller i origo
2. Rotasjon slik at vektoren $P_2 - P_1$ faller langs x-aksen og vektoren $P_3 - P_1$ i planet $z = 0$
3. Skalering med faktoren $1/k$
4. Rotasjon slik at vektoren $P_2 - P_1$ faller i samme retning som vektoren Q_2 - Q_1 og vektoren $P_3 - P_1$ i samme retning som vektoren Q_3 - Q_1
5. Translasjon slik at P_1 faller sammen med Q_1

Vi betegner koordinatene til punktene i sine originale posisjoner slik:

$$P_i = \begin{bmatrix} x_{Pi} & y_{Pi} & z_{Pi} & 1 \end{bmatrix}$$
$$Q_i = \begin{bmatrix} x_{Qi} & y_{Qi} & z_{Qi} & 1 \end{bmatrix}$$

Transformasjonene i planen blir slik:

<u>Transformasjon 1 - Translasjon slik at P_1 faller i origo</u>:

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -x_{P1} \\ 0 & 1 & 0 & -y_{P1} \\ 0 & 0 & 1 & -z_{P1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Transformasjon 2 - Rotasjon slik at vektoren $P_2 - P_1$ faller langs x-aksen og vektoren $P_3 - P_1$ i planet $z = 0$:

Vi lager oss et koordinatsystem aksene u, v og n der P_1 er origo, vektoren $P_2 - P_1$ faller langs u-aksen og vektoren $P_3 - P_1$ ligger i planet $n = 0$. Vi trenger komponentene i xyz-systemet av akseenhetsvektorene e_u, e_v og e_n.

$$e_u = \frac{P_2 - P_1}{|P_2 - P_1|}$$

$$l_1 = \sqrt{(x_{P2} - x_{P1})^2 + (y_{P2} - y_{P1})^2 + (z_{P2} - z_{P1})^2}$$

$$e_{ux} = \frac{x_{P2} - x_{P1}}{l_1}$$

$$e_{uy} = \frac{y_{P2} - y_{P1}}{l_1}$$

$$e_{uz} = \frac{z_{P2} - z_{P1}}{l_1}$$

Vi bestemmer enhetsvektoren langs n-aksen ved vektorproduktet:

$$e_n = \frac{(P_2 - P_1)\times(P_3 - P_1)}{|(P_2 - P_1)\times(P_3 - P_1)|}$$

$$l_2 = \sqrt{\begin{aligned}&[(y_{P2} - y_{P1})(z_{P3} - z_{P1}) - (y_{P3} - y_{P1})(z_{P2} - z_{P1})]^2 + \\ &[(x_{P3} - x_{P1})(z_{P2} - z_{P1}) - (x_{P2} - x_{P1})(z_{P3} - z_{P1})]^2 + \\ &[(x_{P2} - x_{P1})(y_{P3} - y_{P1}) - (x_{P3} - x_{P1})(y_{P2} - y_{P1})]^2\end{aligned}}$$

$$e_{nx} = \frac{(y_{P2} - y_{P1})(z_{P3} - z_{P1}) - (y_{P3} - y_{P1})(z_{P2} - z_{P1})}{l_2}$$

$$e_{ny} = \frac{(x_{P3} - x_{P1})(z_{P2} - z_{P1}) - (x_{P2} - x_{P1})(z_{P3} - z_{P1})}{l_2}$$

$$e_{nz} = \frac{(x_{P2} - x_{P1})(y_{P3} - y_{P1}) - (x_{P3} - x_{P1})(y_{P2} - y_{P1})}{l_2}$$

Enhetsvektoren langs v-aksen blir:

$$e_v = e_z \times e_x$$

$$e_{vx} = e_{uz}e_{ny} - e_{uy}e_{nz}$$

$$e_{vy} = e_{ux}e_{nz} - e_{uz}e_{nx}$$

$$e_{vz} = e_{uy}e_{nx} - e_{ux}e_{ny}$$

Dette gir oss følgende matrise for rotasjonen:

$$M_2 = \begin{bmatrix} e_{ux} & e_{uy} & e_{uz} & 0 \\ e_{vx} & e_{vy} & e_{vz} & 0 \\ e_{nx} & e_{ny} & e_{nz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Transformasjon 3 - Skalering med faktoren 1/*k*:

Matrisen for skaleringen blir:

$$M_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{k} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{k} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{k} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Transformasjon 4 - Rotasjon slik at vektoren $P_2 - P_1$ faller i samme retning som vektoren $Q_2 - Q_1$ og vektoren $P_3 - P_1$ i samme retning som vektoren $Q_3 - Q_1$:

Her lager vi oss et koordinatsystem aksene *r*, *s* og *t* der Q_1 er origo, vektoren $Q_2 - Q_1$ faller langs *r*-aksen og vektoren $Q_3 - Q_1$ ligger i planet $t = 0$. Vi trenger komponentene i *xyz*-systemet av akseenhetsvektorene e_r, e_s og e_t.

$$e_r = \frac{Q_2 - Q_1}{|Q_2 - Q_1|}$$

$$l_3 = \sqrt{(x_{Q2} - x_{Q1})^2 + (y_{Q2} - y_{Q1})^2 + (z_{Q2} - z_{Q1})^2}$$

$$e_{rx} = \frac{x_{Q2} - x_{Q1}}{l_3}$$

$$e_{ry} = \frac{y_{Q2} - y_{Q1}}{l_3}$$

$$e_{rz} = \frac{z_{Q2} - z_{Q1}}{l_3}$$

Vi bestemmer enhetsvektoren langs t-aksen ved vektorproduktet:

$$e_t = \frac{(Q_2 - Q_1) \times (Q_3 - Q_1)}{\left|(Q_2 - Q_1) \times (Q_3 - Q_1)\right|}$$

$$l_4 = \sqrt{\begin{aligned}&[(y_{Q2} - y_{Q1})(z_{Q3} - z_{Q1}) - (y_{Q3} - y_{Q1})(z_{Q2} - z_{Q1})]^2 + \\ &[(x_{Q3} - x_{Q1})(z_{Q2} - z_{Q1}) - (x_{Q2} - x_{Q1})(z_{Q3} - z_{Q1})]^2 + \\ &[(x_{Q2} - x_{Q1})(y_{Q3} - y_{Q1}) - (x_{Q3} - x_{Q1})(y_{Q2} - y_{Q1})]^2\end{aligned}}$$

$$e_{tx} = \frac{(y_{Q2} - y_{Q1})(z_{Q3} - z_{Q1}) - (y_{Q3} - y_{Q1})(z_{Q2} - z_{Q1})}{l_4}$$

$$e_{ty} = \frac{(x_{Q3} - x_{Q1})(z_{Q2} - z_{Q1}) - (x_{Q2} - x_{Q1})(z_{Q3} - z_{Q1})}{l_4}$$

$$e_{tz} = \frac{(x_{Q2} - x_{Q1})(y_{Q3} - y_{Q1}) - (x_{Q3} - x_{Q1})(y_{Q2} - y_{Q1})}{l_4}$$

Enhetsvektoren langs s-aksen blir:

$$e_s = e_t \times e_r$$

$$e_{sx} = e_{rz}e_{ty} - e_{ry}e_{tz}$$

$$e_{sy} = e_{rx}e_{tz} - e_{rz}e_{tx}$$

$$e_{sz} = e_{ry}e_{tx} - e_{rx}e_{ty}$$

Dette gir oss følgende matrise for rotasjonen:

$$M_4 = \begin{bmatrix} e_{rx} & e_{sx} & e_{tx} & 0 \\ e_{ry} & e_{sy} & e_{ty} & 0 \\ e_{rz} & e_{rz} & e_{tz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Transformasjon 5 - Translasjon slik at P_1 faller sammen med Q_1:

$$M_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x_{Q1} \\ 0 & 1 & 0 & y_{Q1} \\ 0 & 0 & 1 & z_{Q1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Samlet transformasjon:

For den samlede transformasjonen konkateneres matrisene slik:

$$M_{total} = M_5 M_4 M_3 M_2 M_1$$

OPPGAVE 3 **Grafikk – Radiositetsmetoden** **(45 poeng)**

a) Forklar kort og konsist hva som er det fysiske grunnlaget for radiositetsmodellen.

Radiositetsmodellen forutsetter at alle flater er ideelt diffuse, det vil si at de sprer innfallende stråling i samsvar med Lamberts cosinuslov. Emisjon av lys beskrives også ved samme lov. Modellen tar ikke hensyn til noen form for refleksjon (speiling) av stråling.

Praktisk bruk av modellen forutsetter at objektene i scenen modelleres ved hjelp av tilstrekkelig små polygoner. Den tilnærmelsen som gjøres, er at emisjon, innstråling og spredning av innstrålingen ansees for å være den samme over hele polygonet. For hvert polygon stilles energibalansen i stasjonær tilstand opp. I balansen inngår polygonets egen emisjon og spredning av en viss andel av den innfallende strålingen.

b) Hva uttrykker formfaktoren?

Formfaktoren F_{ji} angir andelen av utstrålingen fra polygonet A_j som faller inn på polygoner A_i. Formfaktoren er fullstendig bestemt av polygonenes innbyrdes geometri.

c) Sett opp likningen for energibalansen for en flatelapp (radiositetslikningen).

Likningen for energibalansen for en scene som er modellert med n polygoner, er:

$$B_i A_i = E_i A_i + r_i \sum_{j=1}^{n} B_j F_{ji} A_j$$

der B_k er utstrålt energi pr. flateenhet fra polygon k, E_k er egenemisjon pr. flateenhet fra polygon k, F_{ji} er formfaktoren for stråling fra polygon j til polygon i, $?_k$ er spredingskoeffisienten for stråling som faller inn på polygon k og A_k er arealet av polygon k.

d) Hvordan beregnes radiositeten for samlingen av flatelapper i en scene når alle formfaktorene er beregnet og alle radiositetslikningene er satt opp?

For hvert av polygonene stilles det opp en likning for energibalansen slik det er vist i deloppgave c). Det kan vises (gjort i forelesningene) at følgende resiprositet gjelder:

$$F_{ji}A_j = F_{ij}A_i$$

Dette settes inn i likningen fra deloppgave c), og vi får:

$$B_iA_i = E_iA_i + r_i\sum_{j=1}^{n} B_jF_{ij}A_i \qquad i = 1,\cdots,n$$

Her kan A kortes bort, og vi får:

$$B_i = E_i + r_i\sum_{j=1}^{n} B_jF_{ij} \qquad i = 1,\cdots,n$$

Dette systemet av lineære likninger kan for eksempel løses ved bruk av Gauss-Seidels metode.

OPPGAVE 4 Bildebehandling – Histogramekvivalisering (50 poeng)

Gi algoritmen for histogramekvivalisering av et bilde.

OPPGAVE 5 Bildebehandling – FFT (50 poeng)

Fast Fourier Transform (FFT) er en effektiv algoritme for å beregne den diskrete Fouriertransformen. Gi et problem innen bildebehandling som viser nytten av å kombinere FFT og:

a) konvolusjonsteoremet.

b) korrelasjonsteoremet.

OPPGAVE 6 Bildebehandling – Houghtransformen (50 poeng)

To metoder for bildesegmentering er Houghtransformen og aktive/dynamiske konturer ("snakes"). Sammenlign metodene på bakgrunn av deres modellantagelser.