NTNU
Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet

Fakultet for informasjonsteknologi, matematikk og elektroteknikk

Institutt for datateknikk og informasjonsvitenskap

EKSAMEN I FAG SIF8043 BILDETEKNIKK
TORSDAG 15. MAI 2003
KL. 09.00 – 14.00

LØSNINGSFORSLAG - GRAFIKK

OPPGAVE 1 **Grafikk – Geometriske transformasjoner** **(160 poeng)**

Refleksjon er en geometrisk transformasjon som ”avbilder” et punkt symmetrisk om et punkt, en linje eller et plan.

Vi har en linje i rommet (3D) gjennom punktene P_0 og P_1. Finn transformasjonen for refleksjon av et vilkårlig punkt P_r om denne linjen.

Det er ikke nødvendig å konkatenere matrisene for deltransformasjonene.

Refleksjon om en linje og rotasjon med vinkelen p om linjen gir samme resultat.

En metode for å finne den søkte transformasjonen vil derfor kunne bestå av følgende trinn:

1. Transler punktet P_0 til origo.
2. Legg symmetrilinjen (rotasjonsaksen) langs x-aksen.
3. Roter med vinkelen p om x-aksen
4. Før symmetrilinjen tilbake til sin opprinnelige retning
5. Transler punktet P_0 tilbake til sin opprinnelige posisjon

En grei metode for realisering av punktene 2 og 4 i listen overfor, er å gjennomføre en rotasjon ved hjelp av en matrise satt opp med bruk av egenskapene til ortogonale matriser. For å få til dette, trenger vi å definere et ortonormalt koordinatsystem med en av aksene langs symmetrilinjen. De to punktene P_0 og P_1 på komponentform er:

$$P_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$P_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Vi legger *u*-aksen i det søkte ortonormale koordinatsystemet langs rotasjonsaksen. Vi definerer enhetsvektoren $\vec{u}$ langs *u*-aksen:

$$u_x = \frac{x_1 - x_0}{\sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2}}$$

$$u_y = \frac{y_1 - y_0}{\sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2}}$$

$$u_z = \frac{z_1 - z_0}{\sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2}}$$

I dette tilfellet er det ingen spesielle måter som peker seg ut med hensyn på valg av de to øvrige aksene. Derfor velges en enklest mulig løsning. Vi velger å legge *v*-aksen parallelt med planet *z* = 0. Dette gir for *z*-komponenten av enhetsvektoren $\vec{v}$ langs *v*-aksen:

$$v_z = 0$$

De to andre komponentene bestemmes ved hjelp av skalarproduktet og kravet om normering:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z = \underline{u_x v_x + u_y v_y = 0}$$

$$\vec{v} \cdot \vec{v} = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = \underline{v_x^2 + v_y^2 = 1}$$

Her får vi:

$$v_y = -\frac{u_x v_x}{u_y}$$

$$v_x^2 + \frac{u_x^2}{u_y^2} v_x^2 = 1$$

$$v_x = \pm \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{u_x^2}{u_y^2}}} = \pm \frac{u_y}{\sqrt{u_x^2 + u_y^2}}$$

Det er likegyldig hvilken av de to løsningene som velges. Her velges +-løsningen og vi får:

$$v_x = \frac{u_y}{\sqrt{u_x^2 + u_y^2}}$$
$$v_y = -\frac{u_x}{\sqrt{u_x^2 + u_y^2}}$$

u_x og u_y er uttrykt ved koordinatene til punktene P_0 og P_1. Det ansees ikke nødvendig for besvarelsen å sette disse uttrykkene inn i ovenstående resultat.

Enhetsvektoren $\vec{n}$ langs n-aksen kommer fram som vektorproduktet av enhetsvektorene $\vec{u}$ og $\vec{v}$:

$$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$$

Komponentene blir:

$$n_x = u_y v_z - u_z v_y$$
$$n_y = u_z v_x - u_x v_z$$
$$n_z = u_x v_y - u_y v_x$$

Matrisene for trinnene i transformasjonen blir:

Trinn 1:

$$M_1 = T(-x_0, -y_0, -z_0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -x_0 \\ 0 & 1 & 0 & -y_0 \\ 0 & 0 & 1 & -z_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Trinn 2:

$$M_2 = R(u^T, v^T, n^T) = \begin{bmatrix} u_x & u_y & u_z & 0 \\ v_x & v_y & v_z & 0 \\ n_x & n_y & n_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Trinn 3:

$$M_3 = R_x(p) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Trinn 4.

$$M_4 = R(u,v,n) = \begin{bmatrix} u_x & v_x & n_x & 0 \\ u_y & v_y & n_y & 0 \\ u_z & v_z & n_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Trinn 5:

$$M_5 = T(x_0, y_0, z_0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x_0 \\ 0 & 1 & 0 & y_0 \\ 0 & 0 & 1 & z_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Den fullstendige transformasjonen blir:

$$\begin{aligned} M_{total} &= M_5 \cdot M_4 \cdot M_3 \cdot M_2 \cdot M_1 = \\ &= T(x_0, y_0, z_0) \cdot R(u,v,n) \cdot R_x(p) \cdot R(u^T, v^T, n^T) \cdot T(-x_0, -y_0, -z_0) \end{aligned}$$

med matriser som utledet ovenfor.

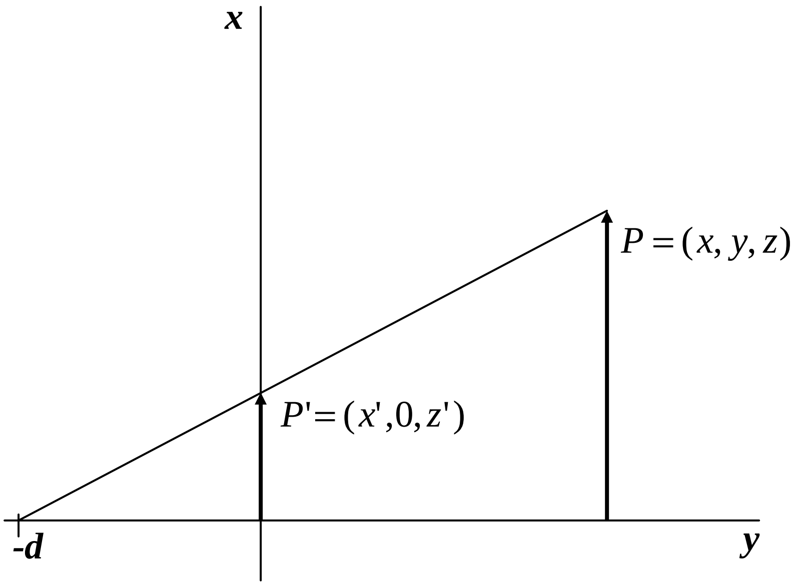
Oppgaven kan også løses med ved å definere vinkler for en flertrinns rotasjonsprosess for å felle symmetriaksen langs en av koordinataksene.

Det er også mulig å erstatte trinnene 2 – 4 med en kvaternionoperasjon. Det ville i så fall være nødvendig enten å skrive ut denne på matriseform for å muliggjøre konkatenering med de uansett nødvendige translasjonene eller å utføre translasjonene som separate operasjoner uten bruk av matriser.

OPPGAVE 2 Grafikk – Projeksjoner (160 poeng)

a) Utled matrisen for perspektivprojeksjon i planet y = 0 når projeksjonssenteret ligger på den negative y-aksen i avstanden d fra origo.

Objektpunktet *P* avbildes i punktet *P'*:



Ved å se på likedannede trekanter i figuren, får vi:

$$\frac{x'}{d} = \frac{x}{y + d}$$

$$x' = \frac{x}{\frac{y}{d} + 1}$$

Tilsvarende:

$$\frac{z'}{d} = \frac{z}{y + d}$$

$$z' = \frac{z}{\frac{y}{d} + 1}$$

Dessuten:

$$y' = 0$$

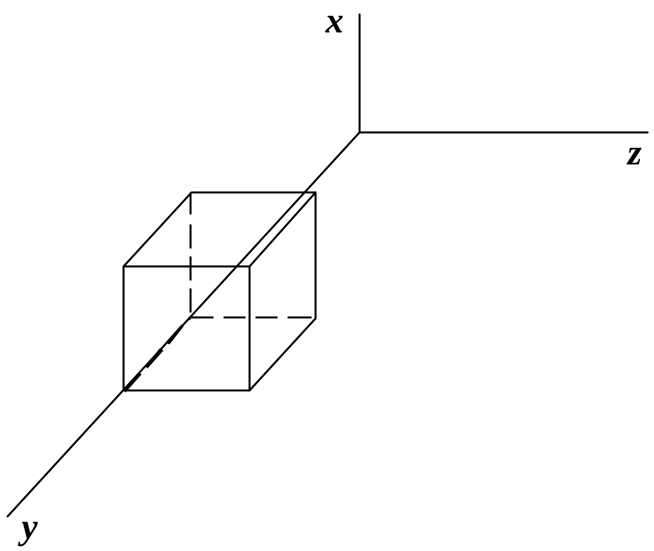
Dette gir avbildningsmatrisen:

$$M_{persp} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{d} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b) En terning har hjørnene:

(0, 15, 0)
(5, 15, 0)
(5, 15, 5)
(0, 15, 5)
(0, 20, 0)
(5, 20, 0)
(5, 20, 5)
(0, 20, 5)

Beregn projeksjonen av terningen slik den er spesifisert i deloppgave a). Utnytt den måten terningen er plassert på til å redusere omfanget av beregningsjobben mest mulig. Bruk verdien d = 5.



Terningen ligger som vist på figuren. Terningkanten (0,15,0) – (0,20,0) ligger på y-aksen og blir avbildet i origo. Siden bildet av de to terningflatene som står vinkelrett på y-aksen, må bli avbildet som kvadrater, vil det være tilstrekkelig å beregne projeksjonene av endepunktene til en diametralt motsatte kanten (5,15,5) – (5,20,5). Med d=5 blir resultatet:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 15 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$$

og:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 20 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix}$$

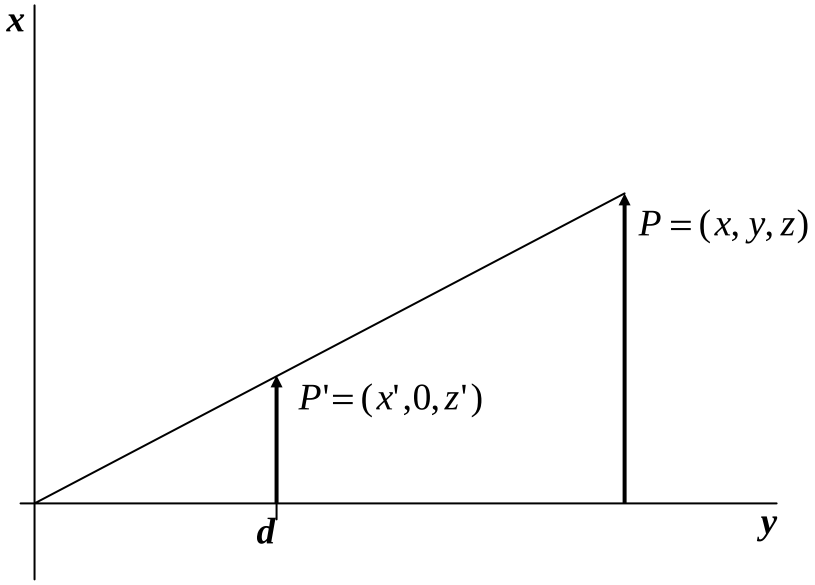
Kanten blir dermed avbildet i linjen:

$$(\frac{5}{4},0,\frac{5}{4}) - (\frac{5}{5},0,\frac{5}{5}) = (\frac{5}{4},0,\frac{5}{4}) - (1,0,1)$$

Projeksjonene av terninghjørnene blir da:

$$(0,0,0)$$
$$(\frac{5}{4},0,0)$$
$$(\frac{5}{4},0,\frac{5}{4})$$
$$(0,0,\frac{5}{4})$$
$$(0,0,0)$$
$$(1,0,0)$$
$$(1,0,1)$$
$$(0,0,1)$$

c) Flytt projeksjonssenteret til origo og la planet y = 5 være projeksjonsplanet. Terningen flyttes ikke. Utled projeksjonsmatrisen for dette tilfellet. Beregn også projeksjonen av terningen for dette tilfellet.



Her får vi:

$$\frac{x'}{d} = \frac{x}{y}$$

$$\frac{z'}{d} = \frac{z}{y}$$

$$y' = d$$

Dette gir avbildningsmatrisen:

$$M_{persp} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{d} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Tilsvarende deloppgave b) er det tilstrekkelig å beregne projeksjonene av endepunktene til kanten (5,15,5) – (5,20,5). Med d = 5 blir resultatet:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 15 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 15 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

og:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 20 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 20 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Kanten blir dermed avbildet i linjen:

$$(\frac{5}{3}, \frac{15}{3}, \frac{5}{3}) - (\frac{5}{4}, \frac{20}{4}, \frac{5}{4}) = (\frac{5}{3}, 5, \frac{5}{3}) - (\frac{5}{4}, 5, \frac{5}{4})$$

Projeksjonene av terninghjørnene blir da:

$$(0,5,0)$$
$$(\frac{5}{3},5,0)$$
$$(\frac{5}{3},5,\frac{5}{3})$$
$$(0,5,\frac{5}{3})$$
$$(0,5,0)$$
$$(\frac{5}{4},5,0)$$
$$(\frac{5}{4},5,\frac{5}{4})$$
$$(0,5,\frac{5}{4})$$

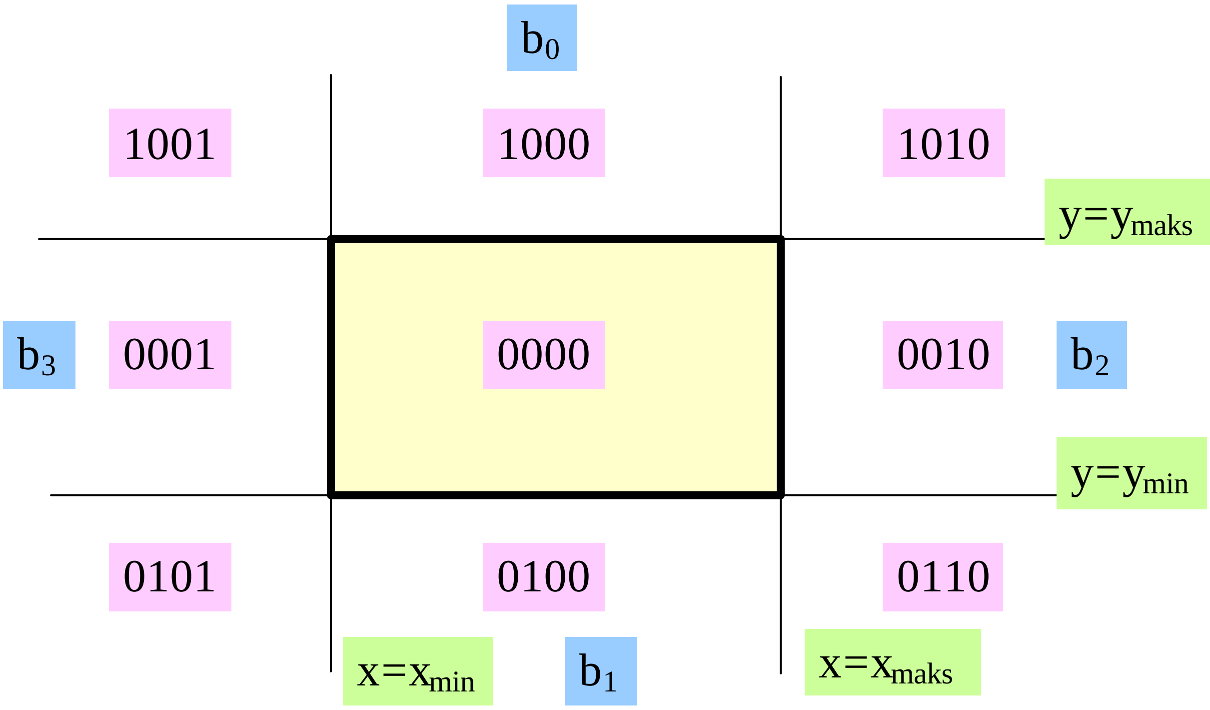
d) Er projeksjonene i deloppgave a), b) og c) enpunkts, topunkts eller trepunkts perspektiviske projeksjoner? Begrunn svaret.

Projeksjonene er alle enpunkts projeksjoner. Årsaken er at to av hovedretningene i objektet er parallelle med projeksjonsplanet. Parallelle linjer i disse to hovedretningene forblir parallelle etter projeksjonen mens linjer i den tredje hovedretningen er parallelle med y-aksen og danner felles forsvinningspunkt med denne.

OPPGAVE 3 Grafikk – Linjeklipping (80 poeng)

Forklar og gjengi Cohen-Sutherlands algoritme for linjeklipping i 2D.

Cohen-Sutherlands algoritme for linjeklipping i 2D benytter en deling av planet i 9 regioner ved at klippevinduet kanter forlenges, se figuren.



Hver sone tildeles en firebits ”utkastingkode”. Koden bygges opp ved at sonene over tildeles en bitposisjon (for eksempel bit 0), sonene under en bitposisjon (for eksempel bit 1), sonene til høyre en bitposisjon (for eksempel bit 2) og sonene til venstre en bitposisjon (for eksempel bit 3). Satt bit lik 1 viser beliggenhet i forhold til klippevinduet. Utkastingskoden for selve vinduet har alle fire bit satt lik 0. Se eksempelkoder i figuren over.

Hvert av endepunktene til en linje som er kandidat for klipping, tildeles utkastingskode etter sonen det ligger i. Hovedprinsippet for algoritmen er at dersom begge endepunktskodene har alle bit satt lik 0, ligger linjen i sin helhet inne i vinduet og kan trivielt beholdes i sin helhet. Dersom de to kodene har en bit satt lik 1 i samme bitposisjon, ligger linjen i sin helhet enten over, under, til høyre for eller til venstre for klippevinduet. Den kan da i sin helhet trivielt forkastes. Alle andre tilfelle må undersøkes videre.

Cohen-Sutherlands algoritme forløper slik:

u1 = utkastingskoden for første endepunkt (x1,y1)
u2 = utkastingskoden for andre endepunkt (x2,y2)

- Hvis ((u1=0) && (u2=0)): Linjen aksepteres trivielt
- Hvis ((u1 &&bitvis u2) != 0) Linjen forkastes trivielt
- Ellers er ett eller begge endepunktene utenfor, mens linjen kan skjære gjennom vinduet:
  - Bruk utkastingskoden til å finne en aktuell kant å beregne skjæring mot
  - Forkast linjebiten som ligger utenfor
  - Utfør ny test på restlinjen
- Iterer til restlinjen enten er trivielt akseptert eller forkastet

OPPGAVE 4 Bildebehandling – Systemer for bildeprosessering (80 poeng)

a) Skisser et blokkdiagram over organiseringen av hardware i en arbeidsstasjon for bildebehandling. Bruk tekst i diagrammet.

b) Tegn et diagram som viser en sekvens av operasjoner som kreves for å trekke ut informasjon for å gjenkjenne formen til mørke objekter mot en lys bakgrunn.

c) Et fargebilde på 256*256 piksler med tre lag piksler av byte-størrelse skal overføres over en 8 bit bred parallell datakanal. Dersom den maksimale overføringshastigheten til kanalen er 100 kBytes per sekund, hva er minimumstiden for å overføre bildet?

d) Hvilken numerisk datatype er nødvendig for Fourier-transformberegninger?

OPPGAVE 5 Bildebehandling – Transformasjonsmetoder (120 poeng)

a) Gi definisjonen på den endimensjonale diskrete Fourier-transformen til funksjonen f(x) over N punkter, x= 0 til x=N-1.

b) Bevis at den diskrete Fourier-transformen til en funksjon, f(x), tatt over N punkter, x=0 til x=N-1, er periodisk med periode N.

c) En todimensjonal bildefunksjon, f(x,y), x=0 til x=127 og y= 0 til y=127, er gitt ved:

$$f(x,y) = 100 + 50 \sin(PI\ x/8) \cos(PI\ x/32).$$

Hva blir koordinatene til toppene i effektspekteret når |F(u,v)| plottes i u,v-domenet?

d) Gjengi samplingsteoremet.

e) Gi et matematisk uttrykk for konvolusjonsteoremet.

OPPGAVE 6 Bildebehandling – Segmentering (120 poeng)

a) Definer de morfologiske operasjonene erosion og dilation, og opening og closing i svart-hvittbilder.

b) Nevn to metoder for å framheve kanter i et bilde.

c) Hva er et 4-naboskap (a 4-connected region)?

d) Tegn et diagram som viser dekomponering av et bilde som et kvad-tre og indiker en systematisk merking av komponentene.

e) Skriv pseudokode for en prosedyre som bruker kvad-tre og ”split and merge”-metoden for å trekke ut regioner.

OPPGAVE 7 Bildebehandling - Representasjon og gjenkjenning (80 poeng)

a) Definer Fourier-deskriptoren til en form.

b) I hvilken utstrekning viser regioner i et bilde geometriske flater tilhørende et objekt?

c) Tegn et detaljert diagram som viser strukturen til et nevralt nettverk og skisser en typisk aktiveringsfunksjon.