NTNU
Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet

Fakultet for informasjonsteknologi, matematikk og elektroteknikk

Institutt for datateknikk og informasjonsvitenskap

KONTINUASJONSEKSAMEN I EMNE TDT4195/SIF8043 BILDETEKNIKK MANDAG 2. AUGUST 2004 KL. 09.00 – 14.00

LØSNINGSFORSLAG - GRAFIKK

OPPGAVE 1 Grafikk – Geometriske transformasjoner (200 poeng)

Plan for transformasjonen:

1. Transler punktet (x_{ref}, y_{ref}, z_{ref}) til origo i xyz-koordinatsystemet
2. Roter slik at aksen S faller langs en av koordinataksene
3. Roter med vinkelen p/2 om aksen S slik den ligger etter rotasjonen i punkt 2
4. Skaler med faktoren 6 langs aksen S slik den ligger etter at punkt 3 er utført
5. Roter slik at aksen S faller i sin opprinnelige retning (invers av punkt 2)
6. Transler slik av punktet (x_{ref}, y_{ref}, z_{ref}) blir liggende i sin opprinnelige posisjon (invers av punkt 1)

Rotasjonen i punkt 2 kan tenkes utført på (minst) tre forskjellige måter:

- Ved hjelp av kvaternioner
- Ved utnyttelse av egenskapene til ortogonale matriser
- Ved å bestemme vinkler for rotasjon om en og en koordinatakse i tur og orden slik at aksen S etter hver kommer til å falle langs en av koordinataksene

Den første metoden vil ikke i noe tilfelle føre med seg singulariteter i løsningen. De to andre metodene kan føre med seg singulariteter ved uheldig kombinasjoner av verdier av vinklene (a,ß,?) (Euler-vinkler, gimbal lock) dersom aksen S i utgangspunktet faller langs en av koordinataksene.

Dersom den første metoden (kvaternioner) velges, vil det bli nødvendig å omskrive den resulterende kvaternionen til en matrise for konkatenering med de øvrige transformasjonsmatrisene. Matrisen er komplisert, er arbeidskrevende å utlede og ventes ikke husket.

Når utgangspunktet for rotasjonen er retningsvinkler, byr det å utnytte egenskapene ved ortogonale matriser seg fram som en attraktiv metode. Denne velges til følgende utledning. Delmatrisene for transformasjonen utledes i rekkefølgen gitt i ovenstående plan.

1. <u>Transler punktet (x_{ref}, y_{ref}, z_{ref}) til origo i xyz-koordinatsystemet</u>

Matrisen stilles opp direkte:

$$(1)\quad \underline{\underline{M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -x_{ref} \\ 0 & 1 & 0 & -y_{ref} \\ 0 & 0 & 1 & -z_{ref} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}}$$

2. <u>Roter slik at aksen S faller langs en av koordinataksene</u>

Etter translasjonen danner aksen S vinklene (a,ß,?) med aksene i xyz-systemet. Vi velger å rotere slik at aksen S kommer til å falle langs x-aksen. Vi tenker oss et koordinatsystem x'y'z' med x'-aksen langs aksen S. Vi velger også å la y'-aksen ligge i planet z = 0. Vi vil finne uttrykk for komponentene av akseenhetsvektorene for systemet x'y'z' i xyz-systemet.

Vi får uten videre komponentene av enhetsvektoren langs x'-aksen:

$$(2)\quad \underline{e_{x'x} = \cos(a)}$$

$$(3)\quad \underline{e_{x'y} = \cos(b)}$$

$$(4)\quad \underline{e_{x'z} = \cos(g)}$$

Med y'-aksen i planet z = 0 er den søkte enhetsvektoren langs y'-aksen $[e_{y'x}\ e_{y'y}\ 0]$. Siden $\vec{e}_{x'}$ og $\vec{e}_{y'}$ er ortogonale og er enhetsvektorer, har vi:

$$(5)\quad \vec{e}_{x'} \cdot \vec{e}_{y'} = e_{x'x}e_{y'x} + e_{x'y}e_{y'y} = \underline{e_{y'x}\cos(a) + e_{y'y}\cos(b) = 0}$$

$$(6)\quad \vec{e}_{y'} \cdot \vec{e}_{y'} = \underline{e_{y'x}e_{y'x} + e_{y'y}e_{y'y} = 1}$$

Dette gir oss når vi forutsetter at $b \neq p/2$ (se diskusjonen av singulariteter):

$$(7)\quad e_{y'y} = -e_{y'x}\frac{\cos(a)}{\cos(b)}$$

$$e_{y'x}^{2}[1+(\frac{\cos(a)}{\cos(b)})^{2}] = 1$$

I denne andregradslikningen kan vi vilkårlig velge den positive eller negative løsningen. Valget har ingen konsekvenser for resultatet. Vi velger å bruke den positive løsningen:

$$(8)\quad \underline{e_{y'x}} = \underline{\sqrt{\frac{1}{[1+(\frac{\cos(a)}{\cos(b)})^{2}]}} = \frac{\cos(b)}{\sqrt{\cos^{2}(a)+\cos^{2}(b)}}}$$

$$(9)\quad \underline{e_{y'y} = -\frac{\cos(a)}{\sqrt{\cos^{2}(a)+\cos^{2}(b)}}}$$

$$(10)\quad \underline{e_{y'z} = 0}$$

Komponentene av den tredje enhetsvektoren $\vec{e}_{z'}$ fåes av vektorproduktet:

$$\vec{e}_{z'} = \vec{e}_{x'} \times \vec{e}_{y'} = \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ e_{x'x} & e_{x'y} & e_{x'z} \\ e_{y'x} & e_{y'y} & e_{y'z} \end{vmatrix}$$

$$(11)\quad \underline{e_{z'x}} = e_{x'y}e_{y'z} - e_{x'z}e_{y'y} = \underline{\frac{\cos(a)\cos(g)}{\sqrt{\cos^{2}(a)+\cos^{2}(b)}}}$$

$$(12)\quad \underline{e_{z'y}} = e_{x'z}e_{y'x} - e_{x'x}e_{y'z} = \underline{\frac{\cos(b)\cos(g)}{\sqrt{\cos^{2}(a)+\cos^{2}(b)}}}$$

$$(13)\quad \underline{e_{z'z}} = e_{x'x}e_{y'y} - e_{x'y}e_{y'x} = \underline{-\frac{\cos^{2}(a)+\cos^{2}(b)}{\sqrt{\cos^{2}(a)+\cos^{2}(b)}}}$$

Den søkte rotasjonsmatrisen blir:

$$(14)\quad \underline{\underline{M_2}} = \begin{bmatrix} e_{x'x} & e_{x'y} & e_{x'z} & 0 \\ e_{y'x} & e_{y'y} & e_{y'z} & 0 \\ e_{z'x} & e_{z'y} & e_{z'z} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \underline{\underline{\begin{bmatrix} \cos(a) & \cos(b) & \cos(g) & 0 \\ \frac{\cos(b)}{\sqrt{\cos^{2}(a)+\cos^{2}(b)}} & -\frac{\cos(a)}{\sqrt{\cos^{2}(a)+\cos^{2}(b)}} & 0 & 0 \\ \frac{\cos(a)\cos(g)}{\sqrt{\cos^{2}(a)+\cos^{2}(b)}} & \frac{\cos(b)\cos(g)}{\sqrt{\cos^{2}(a)+\cos^{2}(b)}} & -\frac{\cos^{2}(a)+\cos^{2}(b)}{\sqrt{\cos^{2}(a)+\cos^{2}(b)}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}}$$

3. Roter med vinkelen p/2 om aksen S slik den ligger etter rotasjonen i punkt 2

Rotasjonsmatrisen kan stilles opp direkte:

$$(15)\ \underline{\underline{M_3}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\frac{\pi}{2}) & -\sin(\frac{\pi}{2}) & 0 \\ 0 & \sin(\frac{\pi}{2}) & \cos(\frac{\pi}{2}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}}$$

4. Skaler med faktoren 6 langs aksen S slik den ligger etter at punkt 3 er utført

Skaleringsmatrisen kan også stilles opp direkte med $s_x = 6$, $s_y = 1$ og $s_z = 1$:

$$(16)\ \underline{\underline{M_4}} = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}}$$

5. Roter slik at aksen S faller i sin opprinnelige retning

Matrisen blir den inverse av matrisen fra punkt 2). Siden matrisen er ortogonal, er den inverse matrisen lik den transponerte

$$(17)\ \underline{\underline{M_5}} = M_2^{-1} = M_2^T =$$

$$= \underline{\underline{\begin{bmatrix} \cos(a) & \frac{\cos(b)}{\sqrt{\cos^2(a)+\cos^2(b)}} & \frac{\cos(a)\cos(g)}{\sqrt{\cos^2(a)+\cos^2(b)}} & 0 \\ \cos(b) & -\frac{\cos(a)}{\sqrt{\cos^2(a)+\cos^2(b)}} & \frac{\cos(b)\cos(g)}{\sqrt{\cos^2(a)+\cos^2(b)}} & 0 \\ \cos(g) & 0 & -\frac{\cos^2(a)+\cos^2(b)}{\sqrt{\cos^2(a)+\cos^2(b)}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}}$$

6. Transler slik av punktet (x_{ref}, y_{ref}, z_{ref}) blir liggende i sin opprinnelige posisjon

Matrisen blir den inverse av matrisen fra punkt 1). Vi får den inverse matrisen ved å skifte fortegn på translasjonsstørrelsene:

$$(18)\ \underline{\underline{M_6 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x_{ref} \\ 0 & 1 & 0 & y_{ref} \\ 0 & 0 & 1 & z_{ref} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}}$$

Den resulterende matrisen får vi ved å konkatenere delmatrisene:

(19) $\underline{\underline{M = M_6 \cdot M_5 \cdot M_4 \cdot M_3 \cdot M_2 \cdot M_1}}$

Konkateneringen forlanges ikke gjennomført.

<u>Drøfting av singulariteter</u>:

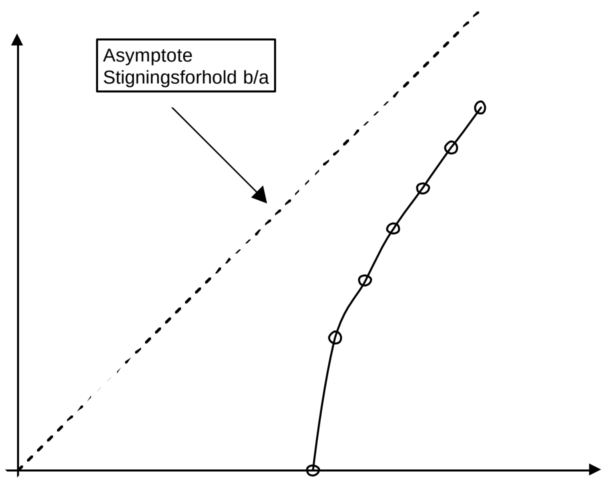
Dersom vinkelen $b = p/2$, det vil si at aksen S ligger parallelt med planet y = 0, kan likning (7) ikke settes opp. Dersom $a \neq p/2$, kan vi i stedet løse likning (5) med hensyn på $e_{y'x}$, bestemme $e_{y'y}$ ved hjelp av likning (6) og ende opp med de samme komponentene som er sluttresultatene i likningene (8) – (12).

Dersom også $a = p/2$ bryter hele prosedyren sammen. I dette tilfellet ligger aksen S parallelt med z-aksen og ingen av uttrykkene i likningene (8) – (12) er gyldige. (Vi har den situasjonen som kalles ”gimbal lock”). I denne situasjonen kan vi fortsatt legge x’-aksen lange aksen S. Det vil si at vi etter translasjonen har x’-aksen langs z-aksen. y’-aksen blir da liggende i planet z = 0 og kan velges helt fritt. Skalarproduktet mellom enhetsvektoren langs y’-aksen og den langs x’-aksen vil uansett bli 0. (Vi kan si at retningen på y’-aksen er udefinert. Det er dette som skaper ”gimbal lock”-problemet.) Den enkleste løsningen når $a = b = p/2$ konstateres, er å hoppe over trinnene 2 og 5 i transformasjonsplanen og for punkt 3 foreta rotasjonen om z-aksen. Den konsistente løsningen vil være å la trinn 2 være en rotasjon med vinkelen $p/2$ om y-aksen og trinn 5 rotasjonen tilbake.

OPPGAVE 4 Grafikk – Midtpunktsmetoden (200 poeng)

a) Likningen må være på implisitt form. Den hensiktsmessige formen er:

$$\underline{\underline{f(x, y) = b^2x^2 - a^2y^2 - a^2b^2 = 0}}$$

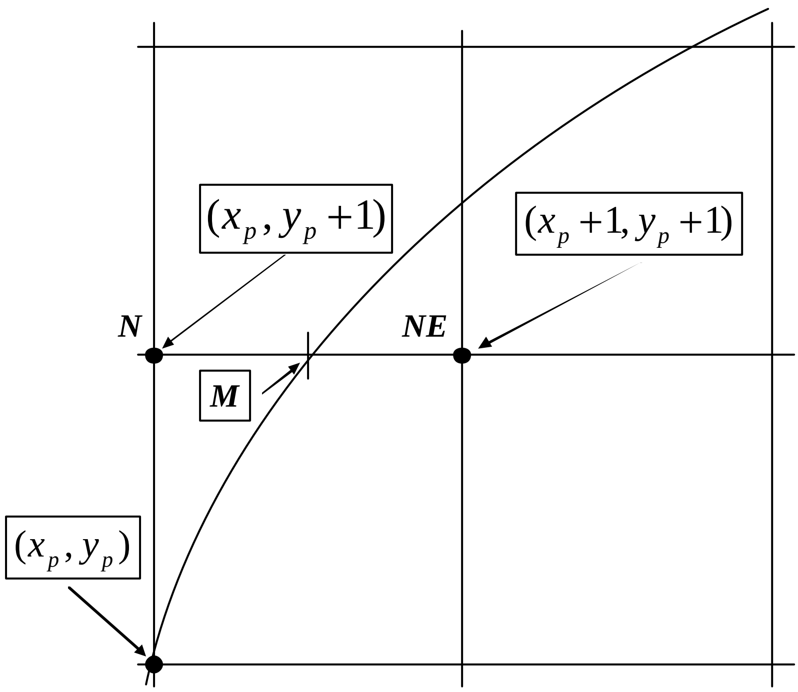


b) I første kvadrant har hyperbelbuen en asymptote med stigningsforhold b/a. Den deriverte av buen er over alt større enn dette. Siden vi forutsetter a = b, vil den deriverte aldri bli mindre enn 1. Det har som konsekvens at vi når vi tegner ved hjelp av midtpunktmetoden, må ta enhetsskritt i y-retningen.

c) Vi innfører en desisjonsvarabel ***d***:

$$\underline{d(x,y) = b^2x^2 - a^2y^2 - a^2b^2}$$

Generelt er både ***a*** og ***b*** positive flyttall. Likningen er skalerbar slik at vi kan gjøre om koeffisientene ***a*** og ***b*** til heltall ved multiplikasjon med en passende skaleringsfaktor.



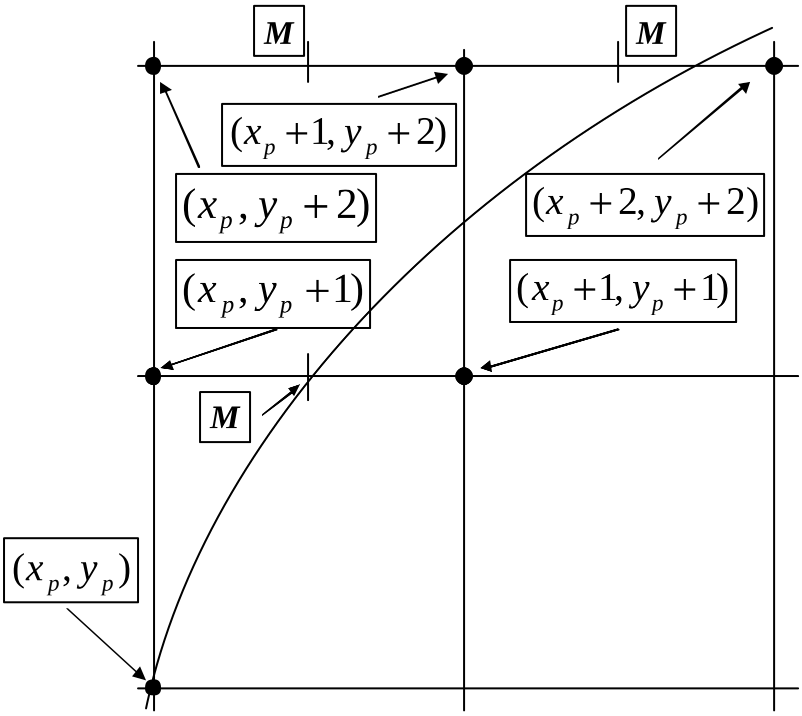
Pikselet (x_p, y_p) er valgt og er evalueringspunkt for neste valg. Kandidater er pikslene (x_p, y_p+1) og (x_p+1, y_p+1). Vi kan avgjøre valget ved å sette koordinatene $(x_p+\frac{1}{2}, y_p+1)$ for midtpunktet ***M*** inn i likningen for desisjonsvariabelen. Av det implisitte uttrykket $f(x,y)$ ser vi at om vi for en gitt ***y***-verdi setter inn en ***x***-verdi som er større enn den som gir et punkt på kurven, blir desisjonsverdien ***d*** positiv. I så fall faller valget på (x_p, y_p+1) som neste piksel. Setter vi inn en ***x***-verdi som er mindre, blir desisjonsverdien ***d*** negativ og valget faller på (x_p+1, y_p+1) som neste piksel.

Desisjonsverdien for valg på linjen y_p+1 blir:

$$\underline{d_{+1}} = d(x_p+\frac{1}{2}, y_p+1) = b^2(x_p+\frac{1}{2})^2 - a^2(y_p+1)^2 - a^2b^2 =$$

$$\underline{= b^2x_p^2 + b^2x_p + \frac{b^2}{4} - a^2y_p^2 - 2a^2y_p - a^2 - a^2b^2}$$

Med tanke på å kunne beregne desisjonsverdien ved inkrementasjon, ser vi nå videre til linje $y_p + 2$.



Dersom $\underline{(x_p, y_p+1)}$ ble valgt på linje $\underline{y_p+1}$:

Kandidatpikslene på linje $y_p + 2$ er $(x_p, y_p + 2)$ og $(x_p + 1, y_p + 2)$. Desisjonsverdien blir:

$$\underline{d_{+2}^N} = d(x_p + \frac{1}{2}, y_p + 2) = b^2(x_p + \frac{1}{2})^2 - a^2(y_p + 2)^2 - a^2b^2 =$$

$$= b^2x_p^2 + b^2x_p + \frac{b^2}{4} - a^2y_p^2 - 4a^2y_p - 4a^2 - a^2b^2 =$$

$$= \underline{d_{+1} - 2a^2y_p - 3a^2 = d_{+1} + \Delta_{+2}^N}$$

$$\underline{\Delta_{+2}^N = -2a^2y_p - 3a^2}$$

Dersom $\underline{(x_p+1, y_p+1)}$ ble valgt på linje $\underline{y_p+1}$:

Kandidatpikslene på linje y_p+2 er (x_p+1, y_p+2) og (x_p+2, y_p+2). Desisjonsverdien blir:

$$\underline{d_{+2}^{NE}} = d(x_p+\frac{3}{2}, y_p+2) = b^2(x_p+\frac{3}{2})^2 - a^2(y_p+2)^2 - a^2b^2 =$$

$$= b^2x_p^2 + 3b^2x_p + \frac{9b^2}{4} - a^2y_p^2 - 4a^2y_p - 4a^2 - a^2b^2 =$$

$$= \underline{d_{+1} + 2b^2x_p + 2b^2 - 2a^2y_p - 3a^2 = d_{+1} + \Delta_{+2}^{NE}}$$

$$\underline{\Delta_{+2}^{NE} = 2b^2x_p + 2b^2 - 2a^2y_p - 3a^2}$$

Igjen ser vi på tilfellet at $\underline{(x_p, y_p+1)}$ ble valgt på linje $\underline{y_p+1}$:

Vi går videre til linjen y_p+3. Dersom $d_{+2}^{N} > 0$, er kandidatpikslene (x_p, y_p+3) og (x_p+1, y_p+3). Inkrementet blir når vi tar utgangspunkt i (x_p, y_p+1) som evalueringspunkt:

$$\underline{\Delta_{+3}^{NN}} = -2a^2(y_p+1) - 3a^2 = \underline{\Delta_{+2}^{N} - 2a^2}$$

Dersom $d_{+2}^{N} < 0$, er kandidatpikslene (x_p+1, y_p+3) og (x_p+2, y_p+3). I dette tilfellet blir inkrementet når vi tar utgangspunkt i (x_p, y_p+1) som evalueringspunkt:

$$\underline{\Delta_{+3}^{NNE}} = 2b^2x_p + 2b^2 - 2a^2(y_p+1) - 3a^2 = \underline{\Delta_{+2}^{NE} - 2a^2}$$

Og så ser vi til slutt igjen på tilfellet at $\underline{(x_p+1, y_p+1)}$ ble valgt på linje $\underline{y_p+1}$:

Også her går vi videre til linjen y_p+3. Dersom $d_{+2}^{NE} > 0$, er kandidatpikslene (x_p+1, y_p+3) og (x_p+2, y_p+3). Inkrementet blir når vi tar utgangspunkt i (x_p+1, y_p+1) som evalueringspunkt:

$$\underline{\Delta_{+3}^{NEN}} = -2a^2(y_p+1) - 3a^2 = \underline{\Delta_{+2}^{N} - 2a^2}$$

Dersom $d_{+2}^{N} < 0$, er kandidatpikslene (x_p+2, y_p+3) og (x_p+3, y_p+3). I dette tilfellet blir inkrementet når vi tar utgangspunkt i (x_p, y_p+1) som evalueringspunkt:

$$\underline{\Delta_{+3}^{NENE}} = 2b^2(x_p+1) + 2b^2 - 2a^2(y_p+1) - 3a^2 = \underline{\Delta_{+2}^{NE} + 2b^2 - 2a^2}$$

Det står igjen å bestemme startverdier. Tegningen skal starte i punktet der $y_{start} = 0$. Her har ***x*** verdien:

$$x_{start} = a$$

Vi får:

$$\underline{d_{+1start}} = b^2a^2 + b^2a + \frac{b^2}{4} - a^2 - a^2b^2 = \underline{b^2(a + \frac{1}{4}) - a^2}$$

$$\underline{\Delta^N_{+2\ start} = -3a^2}$$

$$\underline{\Delta^{NE}_{+2\ start}} = 2b^2a + 2b^2 - 3a^2 = \underline{2b^2(a+1) - 3a^2}$$

Ved skalering av koeffisientene i uttrykker for desisjonsvariablen, må en for å sikre at operasjonene kan utføres som heltallsoperasjoner, passe på at koeffisienten b blir delelig med 2.

I ovenstående er ikke situasjonen $d_{+1} = 0$ behandlet. For dette tilfellet må det gjøres et konsekvent valg om å tegne ***N***- eller ***NE***-pikselet.

d) Algoritme for tegning av hyperbelen:

Initier d_{+1}, Δ^N_{+2} og Δ^{NE}_{+2} med startverdiene fra deloppgave c)
$x \leftarrow a$
$y \leftarrow 0$
Plott (***x***, ***y***)
Plott (-***x***, -***y***)
Gjenta til for eksempel ***x*** har nådd en gitt maksimalverdi
    $y \leftarrow y + 1$
    Hvis $d_{+1} > 0$
        $d_{+1} \leftarrow d_{+1} + \Delta^N_{+2}$
        $\Delta^N_{+2} = \Delta^N_{+2} - 2a^2$
        $\Delta^{NE}_{+2} = \Delta^{NE}_{+2} - 2a^2$
    ellers
        $x \leftarrow x + 1$
        $d_{+1} \leftarrow d_{+1} + \Delta^{NE}_{+2}$
        $\Delta^N_{+2} = \Delta^N_{+2} - 2a^2$
        $\Delta^{NE}_{+2} = \Delta^{NE}_{+2} + 2b^2 - 2a^2$
    slutt hvis
    Plott (***x***, ***y***)
    Plott (***x***, -***y***)
    Plott (-***x***, ***y***)
    Plott (-***x***, -***y***)
slutt gjenta