NTNU
Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet

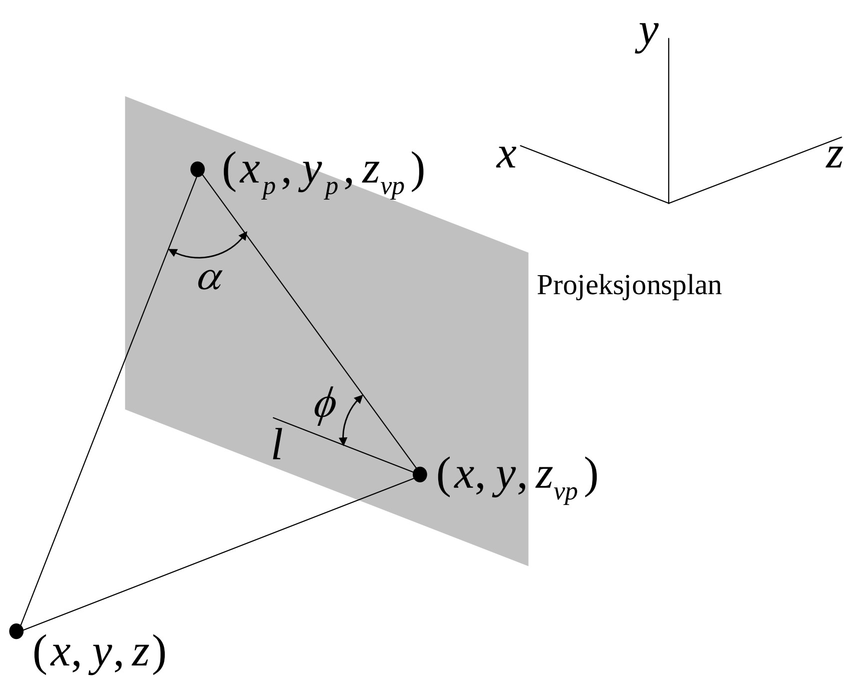
Fakultet for informasjonsteknologi, matematikk og elektroteknikk

Institutt for datateknikk og informasjonsvitenskap

KONTINUASJONSEKSAMEN I EMNE TDT4195 BILDETEKNIKK MANDAG 6. AUGUST 2007 KL. 09.00 – 13.00

LØSNINGSFORSLAG - GRAFIKK

OPPGAVE 1 **Grafikk – Parallellprojeksjoner** **(150 poeng)**



Figur 1

a) Med gitt objekt er det to fundamentale beslutninger som må taes for at en parallellprojeksjon skal være entydig:
- Plassering av projeksjonsplan
- Fastlegge projeksjonsretning

b) Enhetsvektoren $\vec{e}_{par}$ i projeksjonsretningen har samme retning som linjen fra punktet (x, y, z) til punktet (x_p, y_p, z_{vp}). z-komponenten av enhetsvektoren må da bli:

$$(\vec{e}_{par})_z = \sin\alpha$$

Komponenten av enhetsvektoren i projeksjonsplanet blir.

$$(\vec{e}_{par})_{vp} = \cos\alpha$$

Komponentene i henholdsvis x- og y-retningen blir dermed:

$$(\vec{e}_{par})_x = \cos\alpha\cos\phi$$
$$(\vec{e}_{par})_y = \cos\alpha\sin\phi$$

Den søkte enhetsvektoren i projeksjonsretningen blir:

$$\underline{\underline{\vec{e}_{par} = \begin{bmatrix}\cos\alpha\cos\phi & \cos\alpha\sin\phi & \sin\alpha & 0\end{bmatrix}^T}}$$

(Siden denne vektoren alt er en enhetsvektor, trenger den ikke normalisering.)

c) Lengden L av linjestykket fra punktet (x, y, z_{vp}) til punktet (x_p, y_p, z_{vp}) er:

$$L = \frac{|z - z_{vp}|}{\tan\alpha} = \frac{z_{vp} - z}{\tan\alpha}$$

De søkte projiserte koordinatene blir:

$$\underline{\underline{x_p}} = x + L\cos\phi = \underline{\underline{x + \frac{z_{vp} - z}{\tan\alpha}\cos\phi}}$$

$$\underline{\underline{y_p}} = y + L\sin\phi = \underline{\underline{y + \frac{z_{vp} - z}{\tan\alpha}\sin\phi}}$$

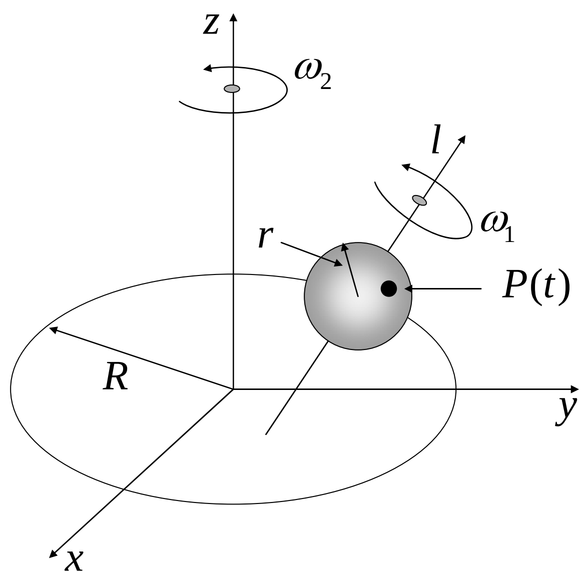
d) Med:

$$z_p = z_{vp}$$

i tillegg, gir dette følgende matrise for avbildning i projeksjonsplanet:

$$\underline{\underline{M_{parallell} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\dfrac{\cos\phi}{\tan\alpha} & \dfrac{z_{vp}\cos\phi}{\tan\alpha} \\ 0 & 1 & -\dfrac{\sin\phi}{\tan\alpha} & \dfrac{z_{vp}\sin\phi}{\tan\alpha} \\ 0 & 0 & 0 & z_{vp} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}}$$

OPPGAVE 2 **Grafikk – Geometriske transformasjoner** **(150 poeng)**



Figur 2

a) I dette tilfellet ligger rotasjonsaksen *l* fast. Følgende plan er en av flere mulige til å besvare deloppgavens spørsmål:

1. Transler slik at aksen *l* går gjennom origo
2. Roter slik at aksen *l* blir liggende langs *x*-aksen
3. Roter med vinkelen $\omega_1 t$ om *x*-aksen
4. Utfør den inverse transformasjonen av punkt 2
5. Utfør det inverse transformasjonen av punkt 1

1. <u>Transler slik at aksen *l* går gjennom origo</u>

   Siden kulas sentrum forblir i utgangsposisjonen, som er på *x*-aksen, er følgende translasjon egnet:

$$\underline{\underline{M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -R \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}}$$

2. <u>Roter slik at aksen *l* blir liggende langs *x*-aksen</u>
   Vi velger å utnytte egenskapene til ortogonale matriser. Vi tenker oss et koordinatsystem $x'y'z'$ med x'-asken langs den translerte l-aksen og y'-aksen liggende i planet $z = 0$ (vilkårlig men hensiktsmessig valg). Vi trenger akseenhetsvektorene. Enhetsvektoren langs x'-aksen er:

$$\vec{e}_{x'} = \begin{bmatrix} e_{x'x} & e_{x'y} & e_{x'z} & 0 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} l_x & l_y & l_z & 0 \end{bmatrix}^T$$

   Siden y'-aksen ligger i planet $z = 0$ får vi:

$$\vec{e}_{y'} = \begin{bmatrix} e_{y'x} & e_{y'y} & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

   $\vec{e}_{y'}$ er enhetsvektor og er ortogonal til $\vec{e}_{x'}$ hvilket gir:

$$\vec{e}_{x'} \cdot \vec{e}_{y'} = l_x e_{y'x} + l_y e_{y'y} = 0$$
$$\vec{e}_{y'} \cdot \vec{e}_{y'} = e_{y'x} e_{y'x} + e_{y'y} e_{y'y} = 1$$

   Dette er et likningssystem med to ukjente som vi kan skrive om slik:

$$e_{y'y} = -\frac{l_x}{l_y} e_{y'x}$$

$$e_{y'x}^2 [1 + (\frac{l_x}{l_y})^2] = 1$$

Vi har forutsatt av $l_y \neq 0$. Her er det likegyldig om vi velger den positive eller negative løsningen av ovenstående andregradslikning. Vi velger den positive og får:

$$e_{y'x} = \sqrt{\frac{1}{1+(\frac{l_x}{l_y})^2}} = \frac{l_y}{\sqrt{l_x^2 + l_y^2}}$$

$$e_{y'y} = -\frac{l_x}{\sqrt{l_x^2 + l_y^2}}$$

$$e_{y'z} = 0$$

Komponentene av den tredje enhetsvektoren $\vec{e}_{z'}$ fåes av vektorproduktet:

$$\vec{e}_{z'} = \vec{e}_{x'} \times \vec{e}_{y'} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ e_{x'x} & e_{x'y} & e_{x'z} \\ e_{y'x} & e_{y'y} & e_{y'z} \end{vmatrix}$$

$$e_{z'x} = e_{x'y}e_{y'z} - e_{x'z}e_{y'y} = \frac{l_x l_z}{\sqrt{l_x^2 + l_y^2}}$$

$$e_{z'y} = e_{x'z}e_{y'x} - e_{x'x}e_{y'z} = \frac{l_y l_z}{\sqrt{l_x^2 + l_y^2}}$$

$$e_{z'z} = e_{x'x}e_{y'y} - e_{x'y}e_{y'x} = -\frac{l_x^2 + l_y^2}{\sqrt{l_x^2 + l_y^2}} = -\sqrt{l_x^2 + l_y^2}$$

Den søkte rotasjonsmatrisen blir:

$$\underline{\underline{M}}_2 = \begin{bmatrix} e_{x'x} & e_{x'y} & e_{x'z} & 0 \\ e_{y'x} & e_{y'y} & e_{y'z} & 0 \\ e_{z'x} & e_{z'y} & e_{z'z} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} l_x & l_y & l_x & 0 \\ \frac{l_y}{\sqrt{l_x^2 + l_y^2}} & -\frac{l_x}{\sqrt{l_x^2 + l_y^2}} & 0 & 0 \\ \frac{l_x l_z}{\sqrt{l_x^2 + l_y^2}} & \frac{l_y l_z}{\sqrt{l_x^2 + l_y^2}} & -\sqrt{l_x^2 + l_y^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}}$$

3. Roter med vinkelen $\omega_1 t$ om x-aksen

Matrisen blir:

$$\underline{\underline{M_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\omega_1 t) & -\sin(\omega_1 t) & 0 \\ 0 & \sin(\omega_1 t) & \cos(\omega_1 t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}}$$

4. Utfør den inverse transformasjonen av punkt 2

$$\underline{\underline{M_4}} = M_2^{-1} = M_2^T = \underline{\underline{\begin{bmatrix} l_x & \frac{l_y}{\sqrt{l_x^2 + l_y^2}} & \frac{l_x l_z}{\sqrt{l_x^2 + l_y^2}} & 0 \\ l_y & -\frac{l_x}{\sqrt{l_x^2 + l_y^2}} & \frac{l_y l_z}{\sqrt{l_x^2 + l_y^2}} & 0 \\ l_z & 0 & -\sqrt{l_x^2 + l_y^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}}$$

5. Utfør den inverse transformasjonen av punkt 1

$$\underline{\underline{M_5}} = M_1^{-1} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & R \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}}$$

Matrisene konkateneres i denne rekkefølgen:

$$\underline{\underline{M_{\omega_2 = 0} = M_5 \cdot M_4 \cdot M_3 \cdot M_2 \cdot M_1}}$$

b) Kulas sentrum roterer om z-aksen i avstanden R fra origo. Posisjonen til kulas sentrum ved tiden t beregnes ved bruk av denne rotasjonsmatrisen:

$$M_6 = \begin{bmatrix} \cos(\omega_2 t) & -\sin(\omega_2 t) & 0 & 0 \\ \sin(\omega_2 t) & \cos(\omega_2 t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Posisjonen av kulesenteret ved tiden *t* blir da:

$$P_{senter}(t) = M_6 \cdot P_{senter}(0) = \begin{bmatrix} \cos(\omega_2 t) & -\sin(\omega_2 t) & 0 & 0 \\ \sin(\omega_2 t) & \cos(\omega_2 t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R\cos(\omega_2 t) \\ R\sin(\omega_2 t) \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Siden rotasjonsaksen *l* har fast orientering i rommet uavhengig av kulas banebevegelse, kan posisjonen til punktet *P* ved tiden *t* finnes ved å anvende transformasjonene M_1 til M_4 fra deloppgave a). Translasjonen M_5 erstattes med translasjonen M_7 som bringer kulesenteret til den posisjonen det har ved tidspunktet *t*:

$$M_7 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & R\cos(\omega_2 t) \\ 0 & 1 & 0 & R\sin(\omega_2 t) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

slik at konkateneringsfølgen for dette tilfellet blir:

$$\underline{\underline{M_{\omega_2 \neq 0} = M_7 \cdot M_4 \cdot M_3 \cdot M_2 \cdot M_1}}$$

Merk at dersom $M_{\omega_2 = 0}$ benyttes som et første steg og kulesenteret deretter bringes til sin endelige posisjon med en rotasjon om *z*-aksen, blir resultatet feil. Med en slik fremgangsmåte vil orienteringen av rotasjonsaksen *l* endre seg.

c) Posisjonen $P(t)$ beregnes henholdsvis som:

$$P(t) = M_{\omega_2 = 0} \cdot P(0)$$

og

$$P(t) = M_{\omega_2 \neq 0} \cdot P(0)$$

d) Problemet som oppstår når punktet *P* ligger på rotasjonsaksen *l* er at vinkelposisjonen om aksen vil være udefinert. Dette vil kunne føre til problemer ved videre animasjon.