NTNU
Institutt for datateknikk
og informasjonsvitenskap

EKSAMEN I EMNE TDT4195
BILDETEKNIKK
TORSDAG 9. JUNI 2011
KL. 09.00 – 13.00

Løsningsforslag

OPPGAVE 1 Grafikk – Planet

a) En terning med hjørner som angitt har sidekant 1 og ligger i første oktant med en sideflate i hvert av koordinatplanene. En mulig koeffisienttabellen blir (koeffisientene er skalerbare):

Plan nr.	A	B	C	D
1	1	0	0	0
2	1	0	0	-1
3	0	1	0	0
4	0	1	0	-1
5	0	0	1	0
6	0	0	1	-1

b) Siden koeffisientene kan skaleres med et hvilket som helst tall forskjellig fra 0 uten at dette påvirker planene, gir den spesifiserte skaleringen <u>ingen endring i kuben</u>.

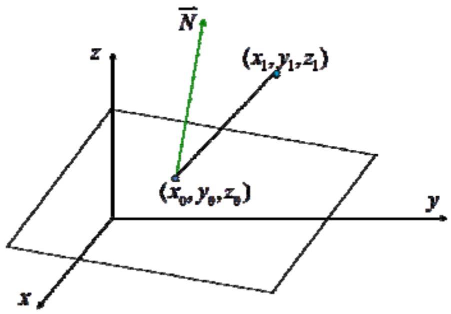
c) Ved å sette koordinatene for hjørnene V_4 og V_5 inn i oppgavetekstens likning (1) med koeffisienter som spesifisert, får vi henholdsvis 0 og -9. Dette betyr at V_4 ligger i planet mens V_5 ikke gjør det:

F_1 er plan
F_2 er ikke plan

d) En normal til planet gitt oppgaveteksten likning (1) er:

$$\vec{N} = \begin{bmatrix} A & B & C & 0 \end{bmatrix}^T$$

e) Først må en definere hva som er foran og hva som er bak planet. Vanligvis definerer en det halvrommet normalen peker inn i som foran. En må bestemme koeffisientene på en slik måte at en får normalen til å peke i den retningen en ønsker. Vi forutsetter dette gjort.



Et punkt i rommet er $P_1 = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \end{bmatrix}^T$. Et vilkårlig punkt i planet er $P_0 = \begin{bmatrix} x_0 & y_0 & z_0 & 1 \end{bmatrix}^T$. Dersom skalarproduktet av normalen $\vec{N}$ (deloppgave d)) og vektoren $\overrightarrow{P_1 - P_0}$ er større enn 0, ligger punktet P_1 foran planet, er det mindre enn 0. ligger det bak. Vi ser på skalarproduktet:

$$\begin{aligned}
\vec{N} \cdot \overrightarrow{P_1 - P_0} &= \begin{bmatrix} A & B & C & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 & 0 \end{bmatrix}^T = \\
&= A(x_1 - x_0) + B(y_1 - y_0) + C(z_1 - z_0) = \\
&= (Ax_1 + By_1 + Cz_1) - (Ax_0 + By_0 + Cz_0) = \\
&= (Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D) - (Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D)
\end{aligned}$$

Den siste parentesen i siste linje gjenkjenner vi som planlikningen innsatt koordinatene for punktet P_0, som ligger i planet. Derfor er verdien av dette leddet lik 0. Vi står igjen med følgende uttrykk for skalarproduktet:

$$\underline{\vec{N} \cdot \overrightarrow{P_1 - P_0} = (Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D)}$$

Dette betyr at en kan finne ut om et punkt ligger foran eller bak et plan gitt ved oppgavetekstens likning (1) ved å sette punktets koordinater inn i likningen. Dersom resultatet blir et tall større enn null, ligger punktet foran. Blir tallet mindre enn 0, ligger punktet bak.

OPPGAVE 2 Grafikk – Rotasjon

a) Metode 1:

Den enkleste måten å løse dette problemet på, er å utnytte at rotasjonsmatriser er ortogonale. En plan for å gjennomføre den spesifiserte rotasjonen med vinkelen θ om rotasjonsaksen, kan være:

1. Definere et system av tre ortonormale vektorer der den ene vektoren ligger langs rotasjonsaksen.
2. Rotere slik at rotasjonsaksen faller langs verdenskoordinatsystemets x-akse og de to øvrige vektorene langs henholdsvis y-aksen og z-aksen.
3. Rotere med vinkelen θ om x-aksen.
4. Utføre den inverse transformasjonen av punkt 2.

Vi trenger et system av tre ortonormale vektorer der den ene vektoren er rettet langs rotasjonsaksen. Av oppgaveteksten går det fram at $\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 0\end{bmatrix}^T$ ligger langs rotasjonsaksen. Den normerte vektoren blir:

$$u = \begin{bmatrix}\frac{1}{3}\sqrt{3} & \frac{1}{3}\sqrt{3} & \frac{1}{3}\sqrt{3} & 0\end{bmatrix}^T$$

De to andre vektorene v og n i systemet av ortonormale vektorer kan velges slik at beregningene blir enklest mulig. Vi velger v slik at $v_z = 0$. De to øvrige komponentene v_x og v_y av v bestemmes ved hjelp av kravet om ortonormalitet:

$$u \cdot v = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z = \frac{v_x}{3}\sqrt{3} + \frac{v_y}{3}\sqrt{3} = 0$$
$$v \cdot v = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = v_x^2 + v_y^2 = 1$$

Den første likningen gir:

$$v_x + v_y = 0$$
$$\Rightarrow v_y = -v_x$$

Innsatt i den andre likningen:

$$v_x^2 + (-v_x)^2 = 1$$
$$2v_x^2 = 1$$
$$\Rightarrow v_x = \pm\frac{1}{2}\sqrt{2}$$

Vi velger tilfeldig å bruke den positive løsningen og får vektoren v:

$$v = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vektoren n får vi ved å beregne vektorproduktet av vektorene u og v:

$$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{bmatrix} \frac{1}{6}\sqrt{6} & \frac{1}{6}\sqrt{6} & -\frac{1}{3}\sqrt{6} & 0 \end{bmatrix}^T$$

Matrisen for rotasjon slik at systemet av ortonormale vektorer faller sammen med verdenskoordinatsystemets akser, blir:

$$\underline{M_1} = \begin{bmatrix} u_x & u_y & u_z & 0 \\ v_x & v_y & v_z & 0 \\ n_x & n_y & n_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{6}}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \underline{\frac{1}{6}\begin{bmatrix} 2\sqrt{3} & 2\sqrt{3} & 2\sqrt{3} & 0 \\ 3\sqrt{2} & -3\sqrt{2} & 0 & 0 \\ \sqrt{6} & \sqrt{6} & -2\sqrt{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}$$

Matrisen for rotasjon med vinkelen θ om x-aksen er:

$$\underline{M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}$$

Matrisen for rotasjon av systemet av ortonormale vektorer tilbake til utgangsposisjonen blir:

$$\underline{M_3} = M_1^{-1} = M_1^T = \underline{\frac{1}{6}\begin{bmatrix} 2\sqrt{3} & 3\sqrt{2} & \sqrt{6} & 0 \\ 2\sqrt{3} & -3\sqrt{2} & \sqrt{6} & 0 \\ 2\sqrt{3} & 0 & -2\sqrt{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}$$

Det søkte matriseuttrykket blir:

$$\underline{\underline{M_{tot} = M_3 \cdot M_2 \cdot M_1}}$$

Konkatenert (ikke krevd i oppgaven):

$$M_{tot} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1+2\cos\theta & 1-\cos\theta-\sqrt{3}\sin\theta & 1-\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta & 0 \\ 1-\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta & 1+2\cos\theta & 1-\cos\theta-\sqrt{3}\sin\theta & 0 \\ 1-\cos\theta-\sqrt{3}\sin\theta & 1-\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta & 1+2\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

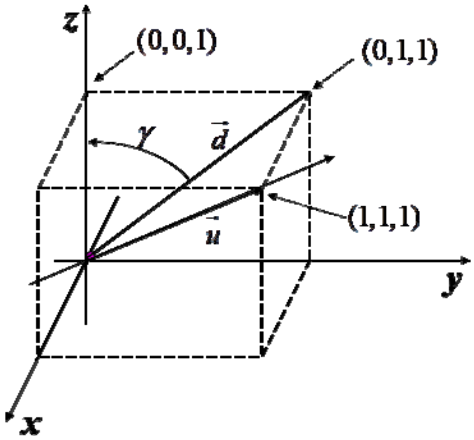
<u>Metode 2</u>:

En kan dekomponere rotasjonen i suksessive rotasjoner om hver av de tre koordinataksene i tur og orden. En kan velge mellom mange kombinasjoner av rotasjoner som gir samme slutteresultat. Vi velger følgende plan:

1. Rotasjon om x-aksen slik at rotasjonaksen faller i planet $y = 0$
2. Rotasjon om y-aksen slik at rotasjonsaksen faller langs z-aksen
3. Rotasjon med vinkelen θ om z-aksen
4. Invers av 2
5. Invers av 1

Siden rotasjonsaksen i utgangspunktet går gjennom origo, er translasjon ikke nødvendig.

Trinn 1: Rotasjon med vinkelen γ om x -aksen:



$$\left|\vec{d}\right| = \sqrt{2}$$

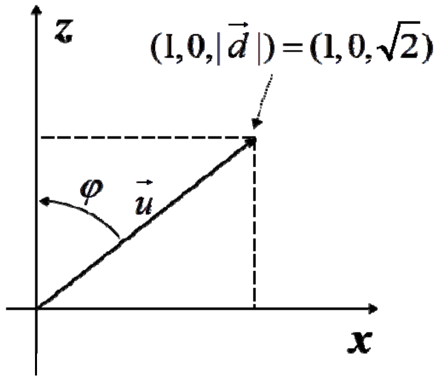
$$\sin\lambda = \frac{1}{\left|\vec{d}\right|} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$\cos\lambda = \frac{1}{\left|\vec{d}\right|} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

Rotasjonsmatrisen for trinn 1 blir:

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Trinn 2: Rotasjon med vinkelen φ om y-aksen:



$$\left|\vec{u}\right| = \sqrt{1+2} = \sqrt{3}$$

$$\sin\varphi = -\frac{1}{\left|\vec{u}\right|} = -\frac{1}{3}\sqrt{3}$$

$$\cos\varphi = \frac{\left|\vec{d}\right|}{\left|\vec{u}\right|} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{6}$$

Rotasjonsmatrisen for trinn 2 blir:

$$M_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}\sqrt{6} & 0 & -\frac{1}{3}\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3}\sqrt{3} & 0 & \frac{1}{3}\sqrt{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Trinn 3: Rotasjon med vinkelen θ om z-aksen:

Rotasjonsmatrisen er:

$$\underline{M_3 = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}$$

Trinn 4: Invers av trinn 2:

$$\underline{M_4} = M_2^{-1} = M_2^T = \underline{\begin{bmatrix} \frac{1}{3}\sqrt{6} & 0 & \frac{1}{3}\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3}\sqrt{3} & 0 & \frac{1}{3}\sqrt{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}$$

Trinn 5: Invers av trinn 1:

$$\underline{M_5} = M_1^{-1} = M_1^T = \underline{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}$$

Det søkte matriseuttrykket blir:

$$\underline{\underline{M_{tot} = M_5 \cdot M_4 \cdot M_3 \cdot M_2 \cdot M_1}}$$

b) Med kvaternionen:

$$\underline{\underline{q = \cos\frac{\theta}{2} + \vec{u}\sin\frac{\theta}{2}}}$$

der $\vec{u}$ er enhetsvektoren langs rotasjonsasken:

$$\vec{u} = \frac{1}{3}\sqrt{3}\,i + \frac{1}{3}\sqrt{3}\,j + \frac{1}{3}\sqrt{3}\,k$$

kan en realisere den gitte rotasjonen.

Punktet (*x*, *y*, *z*) kan representeres med den rene kvaternionen:

$$P = 0 + xi + yj + zk$$

Kvaternionuttrykket for rotasjon med vinkelen θ om den gitte aksen er:

$$\underline{\underline{P' = qPq^*}}$$

der q^* er den konjugerte kvaternionen og P' det roterte punktet representert som en ren kvaternion.

OPPGAVE 3 Grafikk – Midtpunktsalgoritmer

a) Den generelle ideen som er grunnlaget for midtpunktsalgoritmene er som følger:

1. Vi tegner en kurve og har to kandidatpiksler for neste piksel å tegne i enten vertikal eller horisontal retning avhengig av kurvens stigningsforhold (deriverte)
2. Kurvelikningen må foreligge på implisitt form
3. Vi setter koordinatene for midtpunktet mellom de to kandidatpikslene inn i kurvelikningen på implisitt form. Fortegnet på det tallet vi får, forteller oss på hvilken side av kurven midtpunktet ligger og derigjennom også hvilken av kandidatpikslene som ligger nærmest kurven og som dermed skal tegnes.

b) Midtpunktsmetoden egner seg for kurver som kan modelleres ved hjelp av polynomer. Et poeng ved midtpunktmetoden er at man kan ønsker å ta avgjørelser om hvilken piksel som skal tegnes basert på heltallsaritmetikk. Stegvis beregning av polynomverdier kan utføres ved heltallsinkrementasjon. Metoden benevnes framoverdifferenser (forward differences).

c) Stigningsforholdet (den deriverte) til en kurve bestemmer om en skal gå enhetssteg i horisontal eller vertikal retning ved tegning. Dersom stigningsforholdet er større enn 1 i tallverdi, risikerer en å få gap i kurven dersom man går enhetssteg i horisontal retning. Er tallverdien mindre enn en, oppstår det samme problemet om en går enhetssteg i vertikal retning.

d) Den implisitte likning for kurven

$$y = ax^2 \quad x \in [-20, 20]$$

er:

$$f(x, y) = ax^2 - y = 0$$

Denne likningen er slik at dersom du setter inn koordinatene for et punkt som ligger over eller til venstre for kurven, blir resultatet et negativt tall. Punkt under eller til høyre for kurven gir positive tall.

Kurven er symmetrisk om y-aksen slik at når punktet (x, y) er fastlagt, kan en også tegne punktet $(-x, y)$ uten nye beregninger. Derfor kan vi begrense oss til å studere $x \in [0, 20]$.

Den deriverte av funksjonen er:

$$y' = 2ax$$

Vi trenger å vite hvor tallverdien av den deriverte passerer 1:

$$1 = 2|ax_{trans}|$$

$$x_{trans} = \frac{1}{2|a|}$$

Vi får tre situasjoner avhengig av hvor x_{trans} ligger i forhold til det aktuelle intervallet $[0, 20]$:

1. $x_{trans} < 1$: Hele kurvesegmentet tegnes ved å gå enhetssteg i y-retningen (vertikalt).
2. $x_{trans} > 20$: Hele kurvesegmentet tegnes ved å gå enhetssteg i x-retningen (horisontalt).
3. $1 \le x_{trans} \le 20$: En starter tegningen ved å gå enhetssteg i x-retningen. Ved $x = x_{trans}$ går en over til å gå enhetssteg i y-retningen

En trenger en algoritme som er todelt med en del for enhetssteg i x-retningen og en del for enhetssteg i y-retningen.

Når en går enhetssteg i x-retningen, ligger de to kandidatpikslene på samme vertikale linje. Dersom koordinatene for midtpunktet gir et negativt tall når det settes inn i den implisitte kurvelikningen, ligger midtpunktet over kurven. Den nedre kandidatpikselen er nærmere kurven og brukes. I motsatt fall brukes øvre kandidatpiksel.

Når en går enhetssteg i y-retningen, ligger de to kandidatpikslene på samme horisontale linje. Dersom koordinatene for midtpunktet gir et negativt tall når det settes inn i den implisitte kurvelikningen, ligger midtpunktet til venstre for kurven. Den høyre kandidatpikselen er nærmere kurven og brukes. I motsatt fall brukes den venstre kandidatpikselen.

OPPGAVE 4 Bildebehandling – Grunnleggende begreper

a)

Eye:	Camera:
lens flexible	lens rigid
sensitive surface curved	sensitive surface plane
blind spot in field of view	no blind spot
rods + cones (R, G, B)	one type of sensor
variable density of receptors	uniform distribution of receptors
built-in differencing	uniform response
parallel output	serialised output
secatic movements	no need of movemen

b)
c)
d)

OPPGAVE 5 Bildebehandling – Regionbaserte metoder

a) Thresholding is the operation of making a binary decision depending on whether a value obtained from the data is above or below a criterion value called a threshold. The most likely context is the comparison of a pixel value with a threshold and the binary decision is to set an output pixel to fully bright or fully dark. This operation is associated with segmentation which is the operation of classifying pixels as being of interest or not of interest.

b) Optimal algorithms choose their result values on the basis of choosing parameters that maximise a merit function.

Otsu's method chooses a threshold value that maximises the inter-class variance between the sets of pixels in the two classes: foreground and background.

c) The principal axes of a shape are the orthogonal pair of eigen vectors of the (symmetric) covariance matrix of the pixels inside the region. An effective sketching criterion, for a convex region, is that one axis is aligned with the longest line that can be drawn in the region. (Principal axes of a circle are arbitrary.)

d) MPP is the polygon that surrounds a region with minimum length. The path of the straight line segments may lie along the true boundary of the shape but do not cut into it. The shape may have been represented after sub-sampling, ie. aggregating pixels into larger structures using a coarse grid.

OPPGAVE 6 Bildebehandling – Metoder i Fourierdomenet

Anta at definisjonen av 2D-Fouriertransformasjonen av funksjonen $f(x,y)$ over et $N \times N$ -gitter av piksler som gir frekvensdomenerepresentasjonen $F(u,v)$, er:

$$F(u,v) = \sum_0^{N-1}\sum_0^{N-1} e^{-\frac{2\pi j(ux+vy)}{N}} f(x,y)$$

a) There is no assumption that $f(x,y)$ is a real function. It often happens that, if $f(x,y)$ represents an image, then $f(x,y)$ will be real.

b) From:

$$F(u,v) = \sum_0^{N-1}\sum_0^{N-1} e^{-\frac{2\pi j(ux+vy)}{N}} f(x,y)$$

Consider

$$F(u+N,v) = \sum_0^{N-1}\sum_0^{N-1} e^{-\frac{2\pi j[(u+N)x+vy]}{N}} f(x,y)$$

expanding the $e^{\cdots}$ giving

$$F(u+N,v) = \sum_0^{N-1}\sum_0^{N-1} e^{-\frac{2\pi j(ux+vy)}{N}} f(x,y)e^{-2\pi jx}$$

But $e^{-2\pi jx} = 1$. Thus

$$F(u+N,v) = \sum_0^{N-1}\sum_0^{N-1} e^{-\frac{2\pi j(ux+vy)}{N}} f(x,y) = F(u,v)$$

A similar argument shows $F(u,v) = F(u,v+N)$. So

$$F(u,v) = F(u+N,v) = F(u,v+N)$$

c) Many answers are possible: e.g.

$$G(u,v) = e^{\frac{u^2+v^2}{2N^2}}$$