

NORGES TEKNISK-
NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
INSTITUTT FOR FYSIKK

Kontakt under eksamen:
Arne Løhre Grimsmo
Telefon: 91 33 38 72

EKSAMEN TFY4102 FYSIKK
Fredag 10. juni 2011 kl. 0900 - 1300
Bokmål

Hjelpemidler: C

- K. Rottmann: Matematisk formelsamling (alle språk).
- Typegodkjent kalkulator, med tomt minne, i henhold til liste utarbeidet av NTNU. (Citizen SR-270X eller HP30S.)

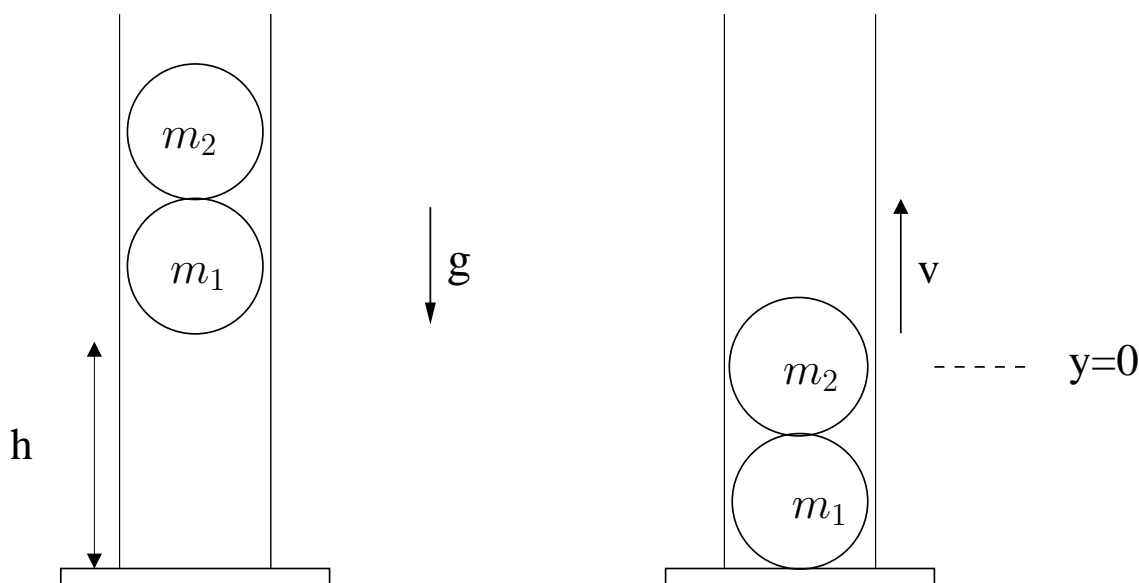
Side 2 – 5: Oppgaver

Side 6 – 8: Formelsamling

Prøven består av 4 oppgaver, i alt 16 deloppgaver. Hver deloppgave vil i utgangspunktet telle like mye på sluttkarakteren.

Sensuren kommer rundt 4. juli 2011.

Oppgave 1.



To baller slippes samtidig nedover et rør. Se bort ifra luftmotstand og eventuell friksjon mot røret. Den nederste ballen har masse m_1 og den øverste har masse $m_2 < m_1$. Ballene slippes, med null starthastighet, fra en høyde h over bakken, som vist i figuren. Alle kollisjoner er i denne oppgaven fullstendig *elastiske*, og skjer så raskt at vi kan se på dem som instantane. For å se på dette problemet lønner det seg å dele det opp i to støt som skjer umiddelbart etter hverandre: Først støtet mellom den nederste ballen og bakken, og så et støt mellom den nederste ballen og den øverste. Følgende størrelser antas kjent i denne oppgaven: h, m_1, m_2 og tyngdeakselerasjonen g .

- Bestem den nederste ballens hastighet v_0 rett *før* støtet mot bakken. Hva er dens hastighet rett *etter* støtet mot bakken?
- Hva er endringen i bevegelsesmengden til den nederste ballen i dette støtet? Forklar hvordan bevaring av bevegelsesmengde kan være ivaretatt.
- Umiddelbart etter at nederste ball har fullført støtet mot bakken kolliderer de to ballene med hverandre. Vis at den øverste ballens hastighet v rett etter kollisjonen blir

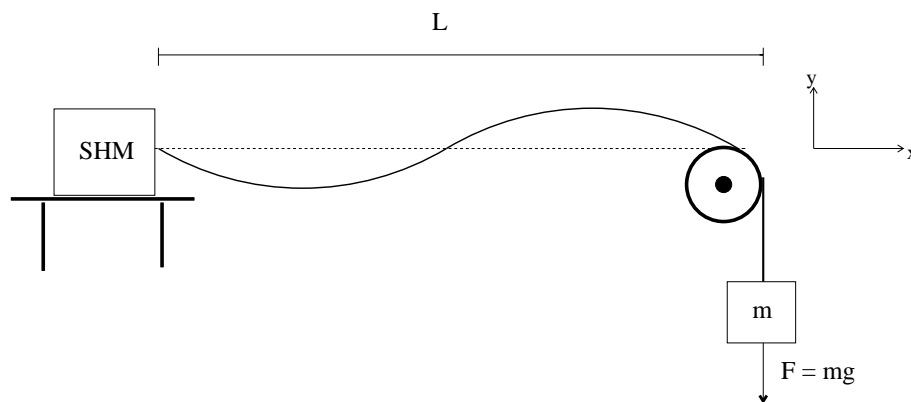
$$v = \frac{Nm_1 - m_2}{m_1 + m_2} |v_0|,$$

og bestem på den måten det positive heltallet N .

- Finns også ut hvor høyt, y , den vil sprette. Hva er den maksimale høyden y for grensetilfellet der m_1 er mye større enn m_2 ?

Oppgave 2.

I figuren under ser vi en skjematisk tegning av et forsøk som demonstrerer stående bølger på en streng.



I den ene enden av strengen er det en bølgekilde, betegnet SHM (“Simple Harmonic Oscillator”) i figuren, som genererer harmoniske bølger på strengen med frekvens f . I den andre enden går strengen over en trinse, og er festet i et lodd med masse m . Strengens lengde er L og den har massetetthet μ . Følgende størrelser antas kjent i denne oppgaven: L, m, g, f, μ .

- Hva er bølgetallet k og bølgelengden λ for bølgene på strengen?
- En superposisjon av en bølge $y_1(x, t) = y_0 \sin(kx - \omega t)$ som propagerer mot høyre, og en bølge $y_2(x, t) = y_0 \sin(kx + \omega t)$ som propagerer mot venstre, resulterer i en stående bølge $y(x, t) = A(x) \cos \omega t$, dvs. en harmonisk svingning med posisjonsavhengig amplitude $A(x)$. Vis dette, og bestem på den måten $A(x)$. (Tips: $\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b$.)
- Vi ser nå på stående bølger på strengen i forsøket beskrevet ovenfor. Anta at utsvinget er null i begge ender, dvs. for $x = 0$ og $x = L$. Bestem de mulige bølgetallene k_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) for slike stående bølger.
- Vi kan bruke dette oppsettet som et enkelt strengeinstrument. Anta at lengden på strengen er 1 meter, og massen av strengen er 0.5 gram. Vi ønsker å “stemme” instrumentet vårt ved å variere massen til loddet m . Hvor stor må m være for at grunntonen (dvs. den stående bølgen med lavest frekvens) skal bli 440 Hz?

Oppgave 3.

Forbrenningen i en bensinmotor kan tilnærmet beskrives av følgende sykliske prosess:

1. Sylindere er fylt med en luft-bensin blanding som komprimeres adiabatisk (ingen varmeutveksling).
2. Drivstoffet antennes, og trykket og temperaturen øker, mens volumet holdes konstant (isokor).
3. Deretter ekspanderer gassen adiabatisk, og stempelet trykkes ut igjen til vi når det maksimale volumet vi startet med i steg 1.
4. Eksos slippes ut, slik at gassen kjøles ned. Trykket og temperaturen går ned, mens volumet holdes konstant (isokor), til vi når samme trykk og volum som syklusen startet med.

La det minste volumet i syklusen være V og det største rV . Anta at luft-bensin blandingen kan betraktes som en ideell gass med adiabatkonstant γ . Temperaturen i starten på hvert steg i prosessen betegnes henholdsvis T_1 , T_2 , T_3 og T_4 .

- a) Skisser denne syklusen i et pV -diagram.

Varmeutvekslingen i denne syklusen skjer i steg 2 og 4. Kall varmen som tilføres systemet i steg 2 for Q_H og varmen som avgis av systemet i steg 4 for $|Q_C|$ ($Q_C < 0$).

- b) Vis at forholdet Q_C/Q_H kan skrives på formen

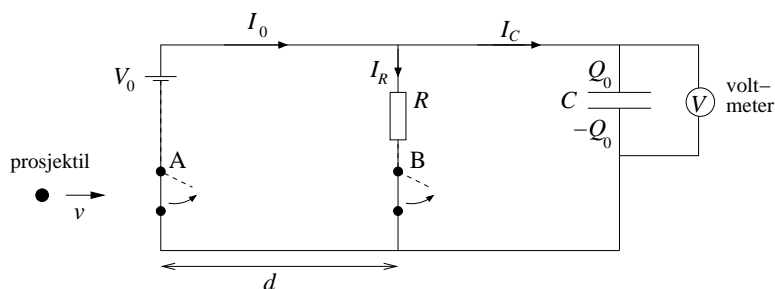
$$\frac{Q_C}{Q_H} = \frac{T_1 - T_4}{T_3 - T_2}.$$

- c) Ta utgangspunkt i uttrykket i punkt b) og bestem effektiviteten e for syklusen, uttrykt ved adiabatkonstanten γ og kompresjonsforholdet r .

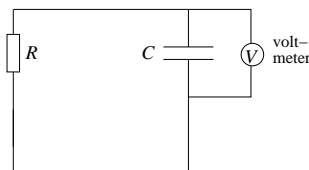
- d) Anta at den sykliske prosessens høyeste og laveste temperatur er spesifisert. Bruk Carnot-prosessens spesielle status til å bestemme det maksimale teoretiske kompresjonsforholdet r .

Oppgave 4.

Kretsen i figuren skal brukes til å måle farten til et prosjektil:



Spenningskilden V_0 er koblet til en kondensator med kapasitans C og en motstand med resistans R som vist i figuren. Et voltmeter (V) måler spenningen over C . Det går en stasjonær (dvs tidsuavhengig) strøm i kretsen i det skuddet avfyres. Ved tidspunktet $t = 0$ treffer prosjektilet bryteren A slik at spenningskilden kobles ut:



Fra og med $t = 0$ avtar ladningen på kondensatoren eksponentielt med tiden,

$$Q(t) = Q_0 e^{-t/\tau},$$

inntil prosjektilet treffer bryteren B ved tidspunktet $t = T$, slik at strømmen i kretsen stopper. Avstanden fra A til B er d . Størrelsene V_0 , C , R og d er å betrakte som kjente størrelser i denne oppgaven.

- Finne uttrykk for strømmene I_0 , I_R og I_C samt kondensatorladningen Q_0 , for $t < 0$, dvs før prosjektilet treffer A . (Se figur øverst.)
- Bruk Kirchhoffs spenningsregel til å skrive ned differensialligningen for kondensatorladningen $Q(t)$ for $0 < t < T$. Vis at uttrykket som er oppgitt for $Q(t)$ ovenfor er en løsning av denne ligningen, og bestem på den måten kretsens tidskonstant τ .
- Hva blir spenningen $V(t)$ som måles med voltmeteret? Skisser $V(t)$ for $-T < t < 2T$.
- Anta at kretsen har komponenter med tallverdiene $R = 1.0 \text{ k}\Omega$ og $C = 10 \text{ }\mu\text{F}$, og at spenningskilden er $V_0 = 12.00 \text{ V}$. Avstanden mellom de to bryterne er $d = 5.0 \text{ m}$. Etter $t = T$ viser voltmeteret 6.16 V . Hva var prosjektilets hastighet v ?

(Et ideelt voltmeter måler potensialforskjellen mellom to punkter i en krets uten å påvirke kretsen forøvrig. Det går ingen strøm gjennom et ideelt voltmeter.)

Formelliste

1 Fysiske konstanter

$$N_A = 6.0221 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1} \quad k_B = 1.3807 \cdot 10^{-23} \text{ J/K} \quad R = N_A k_B = 8.3145 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$$

$$0^\circ\text{C} = 273.15\text{K} \quad \varepsilon_0 = 8.8542 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/\text{Nm}^2 \quad e = 1.6022 \cdot 10^{-19}\text{C}$$

$$c = 2.9979 \cdot 10^8 \text{ m/s} \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2 \quad G = 6.6742 \cdot 10^{-11} \text{ N(m/kg)}^2$$

Merk: k_B har også blitt skrevet som bare k i boka og i forelesningene.

2 Mekanikk

$$\vec{F} = m\vec{a} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad \vec{p} = m\vec{v} \quad \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Konstant akselerasjon a :

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

$$v(t) = v_0 + a t$$

$$a(t) = a$$

Arbeid og energi:

$$\begin{aligned} W_{AB} &= \int dW = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} \\ &= K_B - K_A = \frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2 \\ K &= \frac{1}{2} m v^2 \end{aligned}$$

Total energi $E = K + U$ hvor $U = U(\vec{r}) =$ potensiell energi. For tyngdekraft: $U = mgh$, og for fjærkraft: $U = \frac{1}{2} k x^2$. $E = K + U =$ konstant, hvis kraften er konservativ.

$$\vec{F} = -\nabla U = -\frac{\partial U(x, y, z)}{\partial x} \mathbf{i} - \frac{\partial U(x, y, z)}{\partial y} \mathbf{j} - \frac{\partial U(x, y, z)}{\partial z} \mathbf{k}$$

Effekt: $P = \frac{dW}{dt}$

Gravitasjon: $\vec{F}_g = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$, $U_g = -G \frac{m_1 m_2}{r}$

Overflatefriksjon: $f_k = \mu_k n$, $f_s \leq \mu_s n$

Støt: $\sum \vec{F}_{\text{ext}} =$ summen av eksterne krefter $= 0 \Rightarrow \vec{p}_{\text{før}} = \vec{p}_{\text{etter}}$, kin. energi i støt: $K_{\text{etter}} = K_{\text{før}} + Q$, $Q < 0$ uelastisk, $Q = 0$ elastisk, $Q > 0$ superelastisk

Impuls: $\vec{J} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \Delta \vec{p}$

Sirkelbevegelse: Vinkelhastighet $\omega = \frac{d\theta}{dt} = v/R$. Sentripetalakselerasjon: $a = v^2/R = \omega^2 R$

Hookes lov: $F_x = -kx$

3 Svingninger og bølger

Udempet svingning:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0, \quad \omega_0 = \sqrt{k/m}, \quad T = 2\pi/\omega_0, \quad f = 1/T$$

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi), \quad E = \frac{1}{2} k A^2$$

Dempet svingning: $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m} \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$

For $\frac{b}{2m} < \omega_0$ ("underkritisk"): $x(t) = A e^{-(b/2m)t} \cos(\omega t + \phi)$, $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - (b/2m)^2}$

Tvungne svingninger: $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m} \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = F_{\max} \cos(\omega_d t)$, amplitude: $A = \frac{F_{\max}}{\sqrt{(k - m\omega_d^2)^2 + b^2\omega_d^2}}$

Bølgeligningen:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0, \quad v = \text{bølgehastighet}$$

Periodisk bølge: $y(x, t) = A \cos(kx \pm \omega t)$, $v = |v| = \omega/k = \lambda/T$

Streng: $v = \sqrt{F/\mu}$, $\mu = \text{massetetthet [kg/m]}$

Stående bølger på streng: $L = n\lambda_n/2$, $f_n = v/\lambda_n = n\frac{v}{2L}$, $n = 1, 2, 3, \dots$

Lyd: $v = \sqrt{B/\rho}$, $B = \text{bulkmodulus}$, $\rho = \text{massetetthet [kg/m}^3]$

Decibel skalaen: $\beta = 10 \log_{10}(I/I_0)$, $I = P/A = \text{effekt/areal} = \text{intensitet}$, og $I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$

Dopplereffekt (positiv hastighetsretn. fra lytter (L) til kilde (S)): $\frac{f_L}{v+v_L} = \frac{f_S}{v+v_S}$

Dobbel spalte eksperimentet, konstruktiv interferens: $d \sin \theta = m\lambda$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Diffraksjon fra spalte, destruktiv interferens: $\sin \theta = m\lambda/a$, $m = \pm 1, \pm 2, \dots$

4 Termisk fysikk

$n = \text{antall mol}$, $N = nN_A = \text{antall molekyler}$, $f = \text{antall frihetsgrader}$, $k_B = \text{Boltzmanns konstant}$ (k_B har også blitt skrevet som bare k i boka og i forelesningene)

Faseovergang: $Q = \pm mL$, $L = L_f$ for smeltepunkt eller L_v for kokepunkt

Varmeoverføring: $H = \frac{dQ}{dt} = -kA \frac{dT}{dx}$, varmestraling: $H = Ae\sigma T^4$

$\Delta U = Q - W$, $c = \frac{1}{m} \frac{\Delta Q}{\Delta T} \rightarrow \frac{1}{m} \frac{dQ}{dT}$, $C = \frac{1}{n} \frac{\Delta Q}{\Delta T} \rightarrow \frac{1}{n} \frac{dQ}{dT}$

Arbeid: $dW = p dV \Rightarrow W = \int_1^2 p dV$

Ideell gass: $pV = nRT = Nk_B T$, $pV = \frac{2}{3}K$, $K = N(\frac{1}{2}m\bar{v}^2) = \text{kin. energi}$, $dU = nC_V dT$

Ekvipartisjonsprinsippet:

Legg til $\frac{1}{2}k_B T$ til den kinetiske energien per frihetsgrad per molekyl $\Rightarrow K = fN(\frac{1}{2}k_B T)$, $C_V = f\frac{1}{2}R$,

$C_p = C_V + R$, $\gamma = C_p/C_V$

Adiabat: $pV^\gamma = \text{konst}$, $TV^{\gamma-1} = \text{konst}$.

Varmemaskin: $e = \frac{W}{Q_H} = 1 + \frac{Q_C}{Q_H} = 1 - \left| \frac{Q_C}{Q_H} \right|$

Kjølemaskin: $K = \left| \frac{Q_C}{W} \right| = \frac{|Q_C|}{|Q_H| - |Q_C|}$

$e_{\text{Carnot}} = 1 - T_C/T_H$, $e_{\text{Otto}} = 1 - 1/r^{\gamma-1}$, $K_{\text{Carnot}} = \frac{T_C}{T_H - T_C}$

Entropi: $dS = \frac{dQ}{T}$, $S = \int_1^2 \frac{dQ}{T}$ (langs reversibel prosess)

5 Elektrisitet

Coulomb:

$$\vec{F}(\vec{r}) = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}$$

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

$$\vec{E} = -\nabla V = -\frac{\partial V}{\partial x} \mathbf{i} - \frac{\partial V}{\partial y} \mathbf{j} - \frac{\partial V}{\partial z} \mathbf{k}, \Delta V = V_b - V_a = -\int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Fluks gjennom flate, S : $\Phi = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{A}$

Gauss lov:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{in}}{\epsilon_0} \quad (\text{lukket flate } S)$$

Kapasitans: $C = \frac{Q}{\Delta V}$. For platekondensator: $C = \frac{\epsilon_0 A}{d}$, $U = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} Q^2 / C$

Energi per volum i elektrisk felt: $u_E = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$

Ohms lov:

$$\vec{E} = \rho \vec{j}$$

$$V = RI$$

Elektrisk effekt: $P = \frac{\Delta U}{\Delta t} = \frac{V \Delta Q}{\Delta t} = VI = RI^2 = \frac{V^2}{R}$

Kirchhoffs regler:

1. $\sum_j I_j = 0$ i alle knutepunkt

2. \sum spenning = 0 for alle lukkede sløyfer

Oppladning av kondensator i RC-krets: $Q(t) = \epsilon C(1 - e^{-t/RC})$,

$$I(t) = \frac{\epsilon}{R} e^{-t/RC}$$

Utladning av kondensator i RC-krets: $Q(t) = \epsilon C e^{-t/RC}$, $I(t) = -\frac{\epsilon}{R} e^{-t/RC}$

Kretsens tidskonstant: $\tau = RC$