INSTITUTT FOR FYSIKK

LØSNINGSFORSLAG/SENSORVEILEDNING
EKSAMEN I EMNE TFY 4125 FYSIKK
Eksamen 16 Mai 2019
Tid: kl. 0900 – 1300.

Oppgave 1
Svaralternativet «Farten øker proporsjonalt med tiden» er rett ut fra følgende grunnlag. Startfarten er null. Det betyr at v = at og øker proporsjonalt med tida. Videre er effekten gitt ved
P = W/t = Fs/t = Fv,
og det vil si at effekten er proporsjonal med farten. Den kinetiske energien er

$$E = \frac{1}{2}mv^2$$

og altså proporsjonal med farten kvadrert og dermed også tida kvadrert.

Oppgave 2
Bruken av de kinematiske ligningen i x (for avstand l(t)) og y (for høyde h(t) for kula:

$$h(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + vt\sin\theta \qquad \mathrm{l}(t) = vt\cos\theta$$

Tiden for at kula treffer bakken etter utskyting er gitt ved

$$h(t) = 0 = -\frac{1}{2}gt^2 + vt\sin\theta \quad \Rightarrow t(v\sin\theta - \tfrac{1}{2}gt) = 0$$

Denne har løsningene t=0 (utskytingspunktet, ikke løsning ihht spørsmålsstilling) og $t = \frac{2v\sin\theta}{g}$ som er tiden til at kula treffer bakken etter utskyting.
Ut fra formlene funnet fram til under oppgave 1, er denne avstanden

$$\mathrm{l}(t = \frac{2v\sin\theta}{g}) = v\frac{2v\sin\theta}{g}\cos\theta = \frac{2v^2}{g}\sin\theta\cos\theta$$

Med de gitte numeriske verdiene:

$$\mathrm{l}(t = \frac{2v\sin\theta}{g}) = \frac{2(20m/s)^2}{9.81m/s^2}\sin 25\cos 25 = 31,2m$$

Oppgave 3
Det er gitt at hastigheten er beskrevet ved:

$$v(t) = \frac{v_0\,t}{\tau}e^{-t/\tau}$$

hvor v_0 = 25 m/s og τ=10 s.
Maksimal hastighet. Hastigheten øker lineært helt i starten, men reduseres etter dette på grunn av eksponential funksjonen. Dette innebærer at hastigheten må ha en maksimalverdi. Tidspunktet for maksimal hastighet beregnes ved å løse likningen dv/dt = 0:

$$\frac{dv(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{v_0\,t}{\tau}e^{-t/\tau}\right) = \frac{v_0}{\tau}\left(e^{-t/\tau} - \frac{t}{\tau}e^{-t/\tau}\right) = \frac{v_0}{\tau}e^{-t/\tau}\left(1 - \frac{t}{\tau}\right)$$

$\left(1 - \frac{t}{\tau}\right) = 0;$ dvs ved t= τ

Maksimal hastighet: $v_{\max} = v(t = \tau) = v_0 e^{-1} = 25e^{-1}$ m/s =9.2m/s

Oppgave 4
Vi har at

$$a = \frac{d^2x}{dt^2}$$

Vi integrer så denne likningen for aksellerasjonen to ganger og finner først hastigheten som

$v(t) = \frac{b_1}{2}t^2 - \frac{b_2}{3}t^3$

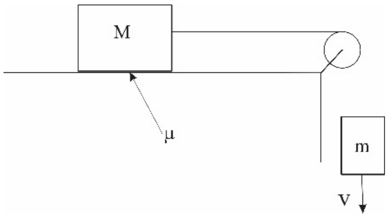
og dernest at forflytningen er gitt av

$x(t) = \frac{b_1}{6}t^3 - \frac{b_2}{12}t^4$

Innsatt med numeriske verdier gir $x(t=10s)=379{,}2$ m

Oppgave 5

Situasjon:



Skal finne μ hvis de to massene beveger seg med konstant hastighet

Ved konstant hastighet er aksellerasjonen lik 0. Netto ytre kraft på de to massene er

$F_{ytr} = mg - \mu Mg$

Her er lagt til grunn at friksjonkraften på M er gitt ved:

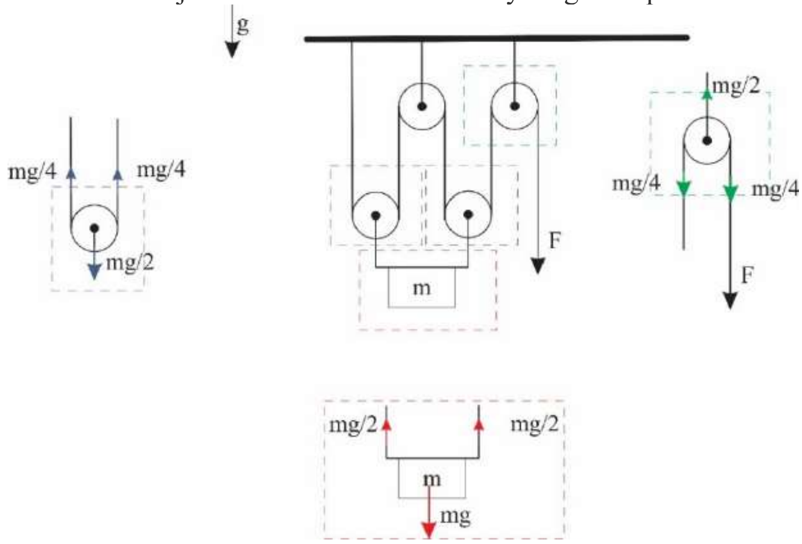
$f = \mu N = \mu Mg$

Newtons 2 lov gir: $mg - \mu Mg = (m+M)a$

Konstant hastighet innebærer at a=0, som gir: $mg - \mu Mg = 0$ Dvs: $\mu = m/M$

OPPGAVE 6

En kan analysere likevektssituasjonen ved å bruke «free body diagram» på ulike deler av taljesystemet:



Ut fra dette finner vi at F = mg/4

Oppgave 7

Den totale mekaniske energi i systemet:

$$\frac{1}{2}(m+M)v^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = mg\Delta z = E_{tot}$$

Andel av mekanisk energi som er lagret som kinetisk energi i trinsa etter at m har falt en distanse delta z, er knyttet til rotasjon av av trinsa: $E_{k,trins} = \frac{1}{2}I\omega^2$

Andel av mekanisk energi som er omdannet til kinetisk energi til trinsa:

$$\frac{E_{k,trins}}{E_{tot}}=\frac{\frac{1}{2}I\omega^2}{\frac{1}{2}(m+M)v^2+\frac{1}{2}I\omega^2}=\frac{\frac{1}{2}\frac{1}{2}m_{trinse}R^2\frac{v^2}{R^2}}{\frac{1}{2}(m+M)v^2+\frac{1}{2}\frac{1}{2}m_{trinse}R^2\frac{v^2}{R^2}}=\frac{m_{trinse}}{2(m+M)+m_{trinse}}$$

Med numeriske verdier:

$$\frac{E_{k,trins}}{E_{tot}}=\frac{m_{trinse}}{2(m+M)+m_{trinse}}=\frac{5}{2(3+10)+5}=16{,}1\%$$

Oppgave 8

I oppgaven må vi legge bevaring av bevegelsesmengde i x og y retning til grunn for å beregne hastighet (angis med komponenter v_x og v_y under) til felles objektet etter det uelastiske støtet.

For x retning: $m_1v_1+m_2v_2\cos\theta=(m_1+m_2)v_x$

For y retning: $0+m_2v_2\sin\theta=(m_1+m_2)v_y$

Dette gir for de to hastighetskomponenten etter kollisjonen:

$v_x=\frac{m_1v_1+m_2v_2\cos\theta}{m_1+m_2}$ og $v_y=\frac{m_2v_2\sin\theta}{m_1+m_2}$

Vinkelen θ_{etter} på bevegelsen etter kollisjonen er gitt ved:

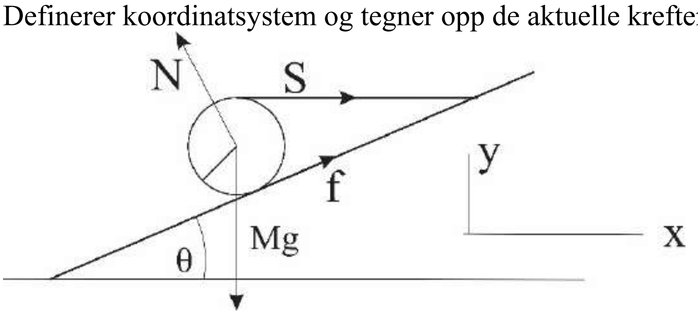
$$\theta_{etter}=\arctan\left(\frac{v_y}{v_x}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{v_y}{v_x}\right)$$

$$\tan(\theta_{etter})=\frac{v_y}{v_x}=\frac{\frac{m_2v_2\sin\theta}{m_1+m_2}}{\frac{m_1v_1+m_2v_2\cos\theta}{m_1+m_2}}=\frac{m_2v_2\sin\theta}{m_1v_1+m_2v_2\cos\theta}=\frac{2450\cdot 60\sin 30}{1750\cdot 45+2450\cdot 60\cos 30}=0.357$$

Dette gir θ_{etter} = 0.343 radianer ; 19.6 grader

Oppgave 9

Definerer koordinatsystem og tegner opp de aktuelle kreftene



Siden kula er i ro, gjelder:

$\sum\vec{F}=0$ og $\sum\vec{\tau}=0$

Ved å velge koordinatsystem med en akse langs skråplanet trenger en ikke se på balansen med N (den er implisitt). Da gjelder:

Langs planet: $f+S\cos\theta=Mg\sin\theta$

Fra dreiemoment: $fr-Sr=0$

finner en $f=S$ Setter inn i første likn:

$\mathrm{f}(1+\cos\theta)=Mg\sin\theta \qquad \Rightarrow f=Mg\frac{\sin\theta}{(1+\cos\theta)}$

Med numeriske verdier M = 5kg, r= 0,25m og 25^0

$$f=\frac{Mg\sin\theta}{1+\cos\theta}=\frac{5kg\,9{,}81m\,s^{-2}\sin 30^\circ}{1+\cos 30^\circ}=13{,}1\mathrm{N}$$

OPPGAVE 10

Tyngdekraften Mg angriper i stangas massesenter, midt på, dvs i avstand L/2 fra A. Tyngdens dreiemoment om A helt i starten er dermed

$\tau = \frac{MgL}{2}$

Stangas treghetsmoment mhp rotasjonsaksen finnes fra:

$I = \int r^2 dm$ (formelark) Anvendt på stanga's rotasjon om A:

$$I = \int_{r=0}^{L} r^2 A\rho dr = A\rho \int_{r=0}^{L} r^2 dr = A\rho \frac{L^3}{3} = A\rho L \frac{L^2}{3} = M \frac{L^2}{3}$$

I formelen er A tverrsnittsarealet, ρ er massetettheten.

Bruker Newtons 2 lov for rotasjon:

$$\tau = I\alpha = M\frac{L^2}{3}\alpha = M\frac{gL}{2}$$

Løst mhp vinkelaksellerasjonen: $\alpha = \frac{3g}{2L} = \frac{3 \cdot 9,81\text{m/s}^2}{2\text{m}} = 14,7\text{s}^{-2}$

Oppgave 11

Bruk av Steiner's sats (oppgitt i formelarket) $I_r = I_0 + mr^2$ på aktuell problmestilling med r=3R/4 gir:

$$I_r = \frac{1}{2}mR^2 + m\left(\frac{3}{4}R\right)^2 = \frac{17}{16}mR^2$$

hvor R både er radius og avstand mellom de to rotasjonsaksene.

Oppgave 12

Bruker bevaring av dreieimpuls for situasjonen før og etter:

$$mv_0L = mv_eL + \tfrac{1}{3}ML^2\omega$$

Her er det brukt at treghetsmomentet til stang om rotasjonsaksen O:

$$I = \frac{ML^2}{3}$$

som beregnes fra

$$I = \int_{r=0}^{L} r^2 A\rho dr = A\rho \int_{r=0}^{L} r^2 dr = A\rho \frac{L^3}{3} = A\rho L \frac{L^2}{3} = M \frac{L^2}{3}$$

Videre: sammenheng mellom hastighet for prosjektilet rett etter kollisjonen og omega: $\omega = \frac{v_e}{L}$

$$mv_0L = mv_eL + \tfrac{1}{3}ML^2\omega = mv_eL + \tfrac{1}{3}ML^2\frac{v_e}{L} = \left(m + \tfrac{1}{3}M\right)Lv_e$$

Løst mht på hastighet etter at kula treffer::

$$\left(\frac{ML^2}{3} + mL^2\right)\frac{v_e}{L} = mvL$$

$$v_e = \frac{m}{m + \frac{1}{3}M}v_0 = \frac{1}{1 + \frac{1}{3}\frac{M}{m}}v_0$$

Numeriske verdier:

$$v_e = 200\frac{1}{1 + \frac{250}{45}}\text{m/s} = 30,5\,\text{m/s}$$

Oppgave 13

Bruker Newtons 2 lov for systemet. Det gir :

$$ma = -mg\sin\theta - bv(t)$$

Innfører vinkelstørrrelser:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{r}\sin\theta - \frac{b}{m}\omega(t)$$

Skriver dette med to differensial likninger som henger sammen:

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{g}{r}\sin\theta - \frac{b}{m}\omega(t)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega(t)$$

Disse danner grunnlag for diskretiseringen:

$$\omega_{n+1} - \omega_n = \left\{-\frac{g}{r}\sin\theta_n - \frac{b}{m}\omega_n\right\}\Delta t$$

$$\theta_{n+1} - \theta_n = \omega_n \Delta t$$

I notasjon for kode: h = Δt

Dvs: svaralternativ :

```
w[n+1] = (-(g/r)*np.sin(vi[n])-b/m*w[n])*h + w[n]
vi[n+1] = w[n]*h + vi[n]
```

Oppgave 14

Gitt f= 8.0 Hz for svingning av en masse i enden av en ideel fjær (*F*=-*kx*), er svingefrekvense ved dobling av massen f_2 gitt ut fra

$$\omega = \sqrt{k/m}$$

Brukt for begge frekvensene:

$$f_2 = f\frac{\sqrt{k/2m}}{\sqrt{k/m}} = \frac{f}{\sqrt{2}} = \frac{8\text{Hz}}{\sqrt{2}} = 5,7\text{Hz}$$

OPPGAVE 15

Fra figuren kan vi lese av f.eks. at x(0) = 1 og x(3T) = 0.4, der T = 2π/ω er svingningens periode. Dermed:

$$e^{-\gamma 3T} = e^{-\gamma 3\cdot 2\pi/\omega} = 0.4$$

Tar naturlig logaritme av begge sider (og ganger med -1):

$$6\pi\frac{\gamma}{\omega} = \ln 2.5$$

$$\frac{\gamma}{\omega} = \frac{\ln 2.5}{6\pi} = 0,048$$

Avrundet: 0.05

Oppgave 16

Fra oppgitt x(t) er

$$a_x = \frac{d^2x(t)}{dt^2} = \frac{d^2\left(0,5m\sin(12s^{-1}t + \pi/4)\right)}{dt^2} = -0,5m(12s^{-1})^2\sin(12s^{-1}t + \pi/4)$$

Den maksimale aksellerasjonen er $0,5m(12s^{-1})^2$ ved $\sin(12s^{-1}t + \pi/4) = -1$ ved som gir a = 72 m/s^2

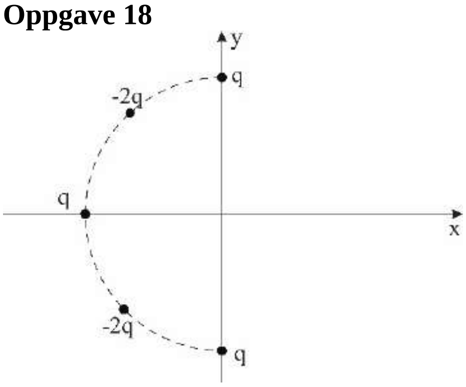
Oppgave 17

Ved plassering av den tredje, negative ladningen langs aksen i området 0<x<a vil kreftene fra både -4q og q være i negativ x-retning. Disse vil alltid være større enn null, og dette området vil derfor ikke være mulig for null nettokraft. For x<0: størrelsen på tiltrekkende kraft fra -4q (mot positiv x retning) vil alltid være større en frastøtende kraft fra q.

For x>b setter vi opp kraftbalansen for den tredje ladningen plassert i x_0:

$$0 = \frac{4q^2}{4\pi\varepsilon_0 x_0^{\ 2}}\vec{i} - \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 \left(x_0 - a\right)^2}\vec{i}$$
$$\Rightarrow \frac{4}{x_0^{\ 2}} = \frac{1}{\left(x_0 - a\right)^2}$$
$$\Rightarrow 4x_0^{\ 2} - 8ax_0 + 4a^2 = x_0^{\ 2}$$
$$\Rightarrow 3x_0^{\ 2} - 8ax_0 + 4b^2 = 0$$
$$\Rightarrow x_0 = \frac{8a \pm \sqrt{64a^2 - 4\cdot 3\cdot 4b^2}}{6} = \frac{8a \pm \sqrt{16a^2}}{6} = \frac{8a \pm 4a}{6}$$
$$\Rightarrow x_0 = 2a$$
(matematisk løsning 2a/3 ikke ok fysisk ut fra argumentasjon over)

Oppgave 18



Må summere opp kraftvirkningene for de fem ladningen på prøveladningen Q i origo. Symmetri i problemstillingen gjør at nettokraften i y-retning er 0

Total kraft i x-retning: $F = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 R^2} + 2\frac{-2qQ}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\cos 45^0 = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\left(1 - 2\sqrt{2}\right) = -\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\left(2\sqrt{2} - 1\right)$

Oppgave 19
Det elektriske potensialet i x-y planet er gitt ved:
$$V(x,y) = -V_0\left(\frac{x^2 + y^2}{a^2}\right)$$
X og y komponentene til det elektriske feltet er gitt ved:
$E_x = -\frac{dV(x,y)}{dx} = \frac{2V_0}{a^2}x$ og $E_y = -\frac{dV(x,y)}{dy} = \frac{2V_0}{a^2}y$
I den angitte posisjonen blir disse: $E_x(x = 3a) = \frac{2V_0}{a^2}3a = \frac{6V_0}{a}$ og $E_y(y = -a) = \frac{2V_0}{a^2}(-a) = -\frac{2V_0}{a}$
Det elektriske feltet I (x,y) =(3a, - a) er:
$$\vec{E}(3a,-a) = \frac{6V_0}{a}\vec{i} - \frac{2V_0}{a}\vec{j}$$

Oppgave 20

Inni strømsløyfa har magnetfeltet B som settes opp av den strømførende lederene retning ned i papirplanet (høyrehåndsregel). Magnetfeltet øker med tida siden strømmen I øker. Magnetisk fluks Φ_B_øker altså nedover. I følge Lenz' lov induseres en strøm i sløyfa som motvirker årsaken til det som genererer indusert EMF, dvs. bidrag til magnetisk fluks fra et magnetfelt som peker oppover. Dette innebærer at strømretningen er mot klokka. B-feltet ved enhver posisjon er proporsjonal med I, derfor er ogsa Φ_B med I og indusert emf er

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_B}{dt} \propto \frac{d}{dt}\mathrm{I(t)} = k$$

Dvs: Strømmen indusert i den rektangulære sløyfa karekteriseres ved:
Går mot klokka og er proporsjonal med k

Oppgave 21
Når ionene akselereres ved hjelp av potensialet V mellom elektrodeparet (A-B), vil de oppnå en kinetisk energi lik qV (endring i potensiell energi). Dette gir følgende likn for hastigheten til ionene (bruker indeks i, og i=1,2)

$$\frac{1}{2}mv_i^2 = qV\,;$$

Dette gir: $v_i = \sqrt{\frac{2qV}{m_i}}$

for hver av ionene når de kommer ut av spalten av elektrode B og starter på området hvor det er et magnetfelt.
Kraften på ionene når de kommer inn i magnetfeltet er gitt ved:

$$F_i = qv_iB_0$$

Retningen på kraften fra magnetfeltet på ionene er vinkelrett på bevegelsesretningen til ionene. Dette gir opphav til sentripetalkraft som er lik

$$\frac{m_iv_i^2}{r_i}$$

Løst mht radius til ionene

$$F_i = qv_iB_0 = \frac{m_iv_i^2}{r_i} \qquad \Rightarrow r_i = \frac{m_iv_i}{qB_0} = \frac{m_i}{qB_0}\sqrt{\frac{2qV}{m_i}} = \frac{1}{B_0}\sqrt{\frac{2m_iV}{q}}$$

Den siste delen: omdanner til å løse ut mhp masse til ionene

$$r_i = \frac{1}{B_0}\sqrt{\frac{2m_iV}{q}} \qquad => m_i = \frac{\mathrm{q}(B_0r_i)^2}{2V}$$

Forhold mellom de to radiene blir da:

$$\frac{m_1}{m_2} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2$$

Oppgave 22
Metallet har frie valenselektroner. Ifølge Lorenzkrafta $F=(-e)v\times B$ vil disse bevege seg mot øvre enden av staven (høyrehåndsregel). - dvs., overskudd av - ladning på topp og negativ ladning i bunnen av metalstaven (svaralternativ D).

OPPGAVE 23
Maksimalt dreiemoment når spolen er orientert som i figuren, med størst mulig arm for den magnetiske kraften på strømmen I. Med vertikal lengde L (der I er angitt i figuren) og bredde b blir magnetisk kraft på hver lederbit med lengde L lik ILB, og med arm b/2 blir dreiemomentet pr vikling ILB·(b/2)·2 = ILbB = IAB.. Med tallverdier: $7.5 \cdot 0.95 \cdot 550 \cdot 10^{-3}$ = 3,92Nm.

Oppgave 24
Den gjensidige induktansen M er definert av $\varepsilon_2 = -M\frac{dI_1}{dt}$

Vi lar indeks 1 referere til spolen og 2 til lederen rundt spolen. Faradays lov gir at den induserte induserte emf i lederen i spolen er gitt av

$\varepsilon_2 = -N\frac{d\Phi_{B2}}{dt}$ hvor Φ_{B2} er magntisk fluks gjennom lederen rundt spolen. I oppgaven er det antatt at magnetfeltet er neglisjerbart utenfor spolen, og vi har da $\Phi_{B2} = \Phi_{B1} = BA$

$$M = \frac{-\varepsilon_2}{dI_1/dt} = \frac{N\,d\Phi_{B2}/dt}{dI_1/dt} = \frac{N\,AdB/dt}{dI_1/dt} = \frac{N\,A\mu_0n\,dI_1/dt}{dI_1/dt} = NA\mu_0n$$

Oppgave 25

Varmestrømstettheten i de to lagene er like. Dette fordi det er stasjonær situasjon, dvs., temperaturene holdes konstant. Det innebærer at varmestrømtettheten er konstant over tid og lik for alle lag gjennom veggen. Hadde den ikke vært det hadde temperaturen blitt endret på flater inni veggen.

Oppgave 26

$\Delta S_1 = \Delta S_2$ fordi entropi er en tilstandsfunksjon. Det innebærer at entropione i tilstand A og B, S_A og S_B er entydig definert, og dermed følger det at $\Delta S_1 = \Delta S_2 = S_B - S_A$

Oppgave 27

Påstanden $Q_p > Q_V$; er korrekt

Fra 1. Hovedsetning: Q = ΔU + W.

Temp. øker likt i begger prosessene innebærer at ΔU > 0 og lik i begge prosessene. Konstant volum gir at W = 0. Volumet må øke når T skal øke med konstant trykk, dvs. W > 0, dermed er Q_p størst. Eller: $Q_p = nC_p T > nC_V T = Q_V$ fordi $C_p > C_V$.

Oppgave 28

I en isoterm prosess er tilført varme like stor som utført arbeid siden det ikke er noe endring i indre energi (T er konstant); $\Delta U = Q - W = 0$.

Fra dette følger at

$$Q = W = nRT_L \ln(V_4/V_3)$$

$$Q = W = nRT_L \ln(V_4/V_3) = 3mol \cdot 8{,}314 J\,K^{-1}\,mol^{-1}(40 + 273{,}15)K \ln(2/6) = -8{,}58\,kJ$$

OPPGAVE 29

Det er flere måter å løse problemstillingen på. Her velges det å ta utgangspunkt i den termodynamiske identitet,

$$TdS = dU + pdV$$

som med dU = 0 langs en isoterm med ideell gass gir:

$$dS = \frac{p\,dV}{T} = \frac{nRT\,dV}{VT} = \frac{nR\,dV}{V}$$

De adiabatiske delprosessene foregår uten utveksling av varme, og dermed uten entropiendring i gassen. Dermed må gassens entropi reduseres like mye i den isoterme kompresjonen ved 420 K som den øker i den isoterme utvidelsen ved 1100 K:

$$\Delta S = -nR\ln(2) = -5 \cdot 8{,}314 \cdot \ln 2 = -28{,}8\,J/K$$

Oppgave 30

Det er gitt at $S(\mathrm{p},V) = nC_V \ln\left(\frac{p}{p_0}\right) + nC_p \ln\left(\frac{V}{V_0}\right) + S_0$

for n mol av en ideell gass. Hva blir S(T,V) for den samme gassen?

Vi må erstatte p og p_0 i uttrykket

$$S(\mathrm{p},V) = nC_V \ln\left(\frac{p}{p_0}\right) + nC_p \ln\left(\frac{V}{V_0}\right) + S_0$$

med T og T_0.

Ideell gasslov

$$pV = nRT$$

gir

$p = \dfrac{nRT}{V}$ og $p_0 = \dfrac{nRT_0}{V_0}$ slik at $\dfrac{p}{p_0} = \dfrac{nRT}{V}\dfrac{V_0}{nRT_0} = \dfrac{TV_0}{T_0 V}$

Innsatt i uttrykket for entropien:

$$S(\mathrm{T},V)=nC_V\ln\left(\frac{TV_0}{T_0V}\right)+nC_p\ln\left(\frac{V}{V_0}\right)+S_0=nC_V\ln\left(\frac{T}{T_0}\right)+nC_V\ln\left(\frac{V_0}{V}\right)+nC_p\ln\left(\frac{V}{V_0}\right)+S_0$$

$$=nC_V\ln\left(\frac{T}{T_0}\right)+n\left(C_p-C_V\right)\ln\left(\frac{V}{V_0}\right)+S_0=C_V\ln\left(\frac{T}{T_0}\right)+nR\ln\left(\frac{V}{V_0}\right)+S_0$$

hvor det i siste overgang er brukt: *Cv+R=Cp*

$$S(T,V)=nC_V\ln\left(\frac{T}{T_0}\right)+nR\ln\left(\frac{V}{V_0}\right)+S_0$$