Løsningsforslag TFY4125 Fysikk Eksamen 9. august 2022

Kjør `tfy4125_eksamen_s22.py` for å regne ut svarene på begge varianter. Svarene nedenfor gjelder for den første varianten av hver oppgave.

1) Mannens akselerasjon: $a = dv/dt = -\alpha v_0 \exp(-\alpha t)$, som er maksimal ved $t = 0$:

$$\boxed{|a_{\max}| = \alpha v_0.}$$

Eks: Hvis $v_0 = 1.4$ m/s og $\alpha = 0.000025$ pr sekund, er $|a_{\max}| = 35\,\mu\text{m/s}^2$.

2) På et lite tidsintervall dt tilbakelegges en strekning $dx = v(t)\,dt$. Integrasjon fra $t = 0$ til t gir avstanden $x(t)$ tilbakelagt på tiden t. Divisjon med t gir deretter gjennomsnittsfarten:

$$\boxed{\langle v \rangle = \frac{v_0}{\alpha t}(1 - e^{-\alpha t})}$$

Eks: Med tallverdier som i 1, samt $t = 3600$ s, er dette 1.34 m/s.

3) Fra $x(t) = (v_0/\alpha)(1 - \exp(-\alpha t))$ finner vi:

$$\boxed{t = -\frac{1}{\alpha}\ln(1 - \frac{x\alpha}{v_0}).}$$

Eks: Med $x = 25000$ m og tallverdier som i 1 er dette 6.57 timer.

4) Vinkelakselerasjon: $\alpha = d\omega/dt = \omega_0^2 \sin \omega_0 t$. Denne er maksimal når sinusfunksjonen er 1:

$$\boxed{\alpha_{\max} = \omega_0^2.}$$

Eks: Med $\omega_0 = 0.15$ rad/s er $\alpha_{\max} = 0.023$ rad/s^2.

5) Maksimal vinkelfart er $2\omega_0$, slik at Pers maksimale banefart er:

$$\boxed{v_{\max} = 2\omega_0 r.}$$

Eks: Med $r = 3.0$ m blir $v_{\max} = 0.90$ m/s.

6) Omløpt vinkel i løpet av en tid dt er $d\phi = \omega\, dt$. I løpet av en tid t:

$$\phi(t) = \omega_0 t - \sin \omega_0 t.$$

Antall hele runder er heltallsverdien av $\phi/2\pi$:

$$\boxed{N = [\phi(t)/2\pi]\,.}$$

Eks: Med ω_0 som over og $t = 126$ s er $N = 3$.

7) Farten til M like før kollisjonen med m finner vi med energibevarelse: $MgL = Mv_0^2/2 \;\Rightarrow\; v_0 = \sqrt{2gL}$. Impulsbevarelse i kollisjonen gir ligningen $Mv_0 = (m+M)v_1$, dvs:

$$\boxed{v_1 = v_0 \cdot M/(M+m).}$$

Eks: Med $M = 80$ g, $m = 40$ g og $L = 0.60$ m blir $v_1 = 2.3$ m/s.

8) Konstant akselerasjon $-g$ vertikalt og landing i $y = 0$ gir $0 = L - gt^2/2$. Det gir:

$$\boxed{t = \sqrt{2L/g}.}$$

Eks: Med tallverdier som i oppgave 7 blir $t = 0.35$ s.

9) N1 anvendt på m gir $s = mg$. N1 for rotasjon anvendt på trinsa gir $S = s$. Og N1 anvendt på M gir $S = f_k = \mu_k N = \mu_k Mg$, der vi til slutt brukte N1 vertikalt for M. Kombinert gir dette:

$$\boxed{\mu_k = m/M.}$$

Eks: Med $m = 40$ g og $M = 90$ g er $\mu_k = 4/9 = 0.44$.

10) N1 for m gir:

$$\boxed{s = mg.}$$

Eks: $m = 40$ g gir $s = 0.39$ N.

11) Klossenes bidrag er banedreieimpulsen $(m+M)Rv$. Trinsas bidrag er $I_0\omega = (1/2)mRv$. Totalt:

$$\boxed{L = (3m/2 + M)Rv.}$$

Eks: Med $R = 0.075$ m og tallverdier for M og m som i oppgave 9 og 10 finner vi $L = 2.8$ mJs.

12) N2 gir:

$$\boxed{\tau = mV_0/F.}$$

Eks: Med $V_0 = 0.43$ m/s, $m = 0.141$ kg og $F = 200$ N er $\tau = 0.30$ ms.

13) Kulas indre dreieimpuls:

$$\boxed{L_s = I_0\omega = 2mrV_0/5.}$$

Eks: $V_0 = 0.43$ m/s, $m = 0.141$ kg og $r = 26.25$ mm gir $L_s = 0.64$ mJs.

14) Hvis kula ruller i negativ x-retning (retning nr 4), peker den indre dreieimpulsen $\boldsymbol{L}_s = I_0\boldsymbol{\omega}$ i negativ y-retning mens banedreieimpulsen $\boldsymbol{L}_b = \boldsymbol{R}_{\mathrm{CM}} \times m\boldsymbol{V}_0$ peker ut av planet, dvs i positiv z-retning. Riktig angivelse av fortegn på komponentene av kulas totale dreieimpuls $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}_s + \boldsymbol{L}_b$ er dermed $(0, -, +)$. Tilsvarende betraktninger gir for retning nr 6: $(+, 0, -)$.

15) N2 for translasjon og rotasjon om CM i kollisjonens varighet gir ligningene $mV_0 = F\tau$ og $(2/5)mrV_0 = F\tau(r-h)$. Vi løser mhp treffhøyden h og finner:

$$\boxed{h = 3r/5.}$$

Eks: Med $r = 26.25$ mm har vi $h = 16$ mm.

16) Energibevarelse gir $v^2 = 10gy_0(1-\exp(-\alpha))/7$, dvs:

$$\boxed{v = \sqrt{10gy_0(1-\exp(-\alpha))/7}.}$$

Eks: Med $y_0 = 0.30$ m og $\alpha = 3.0$ blir $v = 2.0$ m/s.

17) Fra forelesningene (dette var en hjemmeeksamen) har vi $\mu_s^{\min} = (c/(1+c))|\tan\beta|$. Her er $c = 2/5$ og $\tan\beta = dy/dx = (-\alpha y_0/L)\exp(-\alpha x/L)$, som med $x = 0$ gir:

$$\boxed{\mu_s^{\min} = 2\alpha y_0/7L.}$$

Eks: Med $\alpha = 3.0$, $y_0 = 0.30$ m og $L = 1.4$ m er $\mu_s^{\min} = 0.18$.

18) Friksjonskraften er:

$$\boxed{f = (2/7)mg\sin\beta,}$$

der banens helningsvinkel bestemmes av $\tan\beta = dy/dx$, se oppg 17. Ved $x = L/2$ er $f = 4.0\,\text{mN}$.

19) Akselerasjon ved $x = 0$ er:

$$\boxed{a = (5/7)g\sin\beta.}$$

Eks: Ved $x = 0$ er $a = 3.8$ m/s^2.

20) Middelverdi: 0.51 m/s. Standardfeil: 0.01 m/s.

21) I $x = d/2$ peker feltbidragene fra q og $-3q$ mot høyre (positiv retning) mens bidraget fra $2q$ peker mot venstre. Dermed:

$$\boxed{E(d/2) = \frac{4q}{4\pi\varepsilon_0 d^2} - \frac{8q}{4\pi\varepsilon_0 d^2} + \frac{4q/3}{4\pi\varepsilon_0 d^2} = -\frac{8q/3}{4\pi\varepsilon_0 d^2}.}$$

Eks: Med $q = e$ og $d = 1.0$ nm er feltstyrken 3.84 GV/m.

22) Potensialbidragene fra q og $2q$ er positive; negativt fra $-3q$:

$$\boxed{V(d/2) = \frac{2q}{4\pi\varepsilon_0 d} + \frac{4q}{4\pi\varepsilon_0 d} - \frac{2q}{4\pi\varepsilon_0 d} = \frac{4q}{4\pi\varepsilon_0 d}.}$$

Eks: Med $q = e$ og $d = 1.0$ nm er $V(d/2) = 5.76$ V.

23) $V = 0$ løses her av ligningen

$$1/x + 2/(x-d) - 3/(2d-x) = 0.$$

Dette gir:

$$\boxed{x = \frac{5+\sqrt{13}}{6}\,d.}$$

Eks: Med $d = 1.0$ nm blir $x = 1.43$ nm.

24) Vinkelen β vi skal finne er bestemt av at $\tan\beta = F_y/F_x$. Dette forholdet blir uavhengig av tallverdier for q og d. En betraktning av de ulike bidragene gir:

$$\begin{aligned} F_{1x} = F_{1y} &= F_0/2\sqrt{2} \\ F_{2y} = F_2 &= 2F_0 \\ F_{3x} = -F_{3y} &= 3F_0/2\sqrt{2} \end{aligned}$$

med $F_0 = q^2/4\pi\varepsilon_0 d^2$; $F_{2x} = 0$. Vi legger sammen komponentene og finner

$$\begin{aligned} F_x &= \sqrt{2}F_0 \\ F_y &= (2 - 1/\sqrt{2})F_0 \end{aligned}$$

Dermed:

$$\boxed{F_y/F_x = (2 - 1/\sqrt{2})/\sqrt{2} = \sqrt{2} - 1/2,}$$

som gir $\beta = 42$ grader.

25) Seriekoblingen av de to helt til høyre har kapasitans $(1/C + 1/C)^{-1} = C/2$. Denne er parallellkoblet med den i midten, slik at disse tre har kapasitans $C + C/2 = 3C/2$. Denne er igjen seriekoblet med de to siste, slik at total kapasitans blir:

$$C_{\mathrm{TOT}} = (1/C + 1/C + 2/3C)^{-1} = 3C/8.$$

Dermed er ladningen på hver av de to til venstre $Q = 3V_0C/8$. Denne fordeles med 2/3 på C i midten og 1/3 på de to til høyre. Dermed er spenningen over hver av de to til høyre:

$$\boxed{V = V_0/8.}$$

Eks: Med $V_0 = 12$ V er $V = 1.5$ V.

26) Som allerede funnet underveis i nr 25:

$$\boxed{Q = 3V_0C/8.}$$

Eks: Med $V_0 = 12$ V og $C = 12$ nF er $Q = 54$ nC.

27) Seriekoblingen av de to lengst til høyre har motstand $2R$. Parallellkoblingen av denne med R i midten har motstand $(1/R + 1/2R)^{-1} = 2R/3$. Seriekoblingen av denne med de to til venstre resulterer i en total motstand

$$R_{\mathrm{TOT}} = 8R/3.$$

Total strøm i kretsen er dermed $3V_0/8R$, som fordeles med 2/3 gjennom R i midten og 1/3 gjennom de to til høyre, dvs strøm $V_0/8R$ gjennom de to til høyre. Dermed:

$$\boxed{V = V_0/8.}$$

Eks: Med $V_0 = 12$ V blir $V = 1.5$ V.

28) Som sagt under nr 27, total strøm i kretsen er $I = V_0/R_{\mathrm{TOT}} = 3V_0/8R$, som i sin helhet passerer gjennom R oppe til venstre:

$$\boxed{I = 3V_0/8R.}$$

Eks: Med $V_0 = 12$ V og $R = 12\ \Omega$ er $I = 375$ mA.

29) Energi lagret i kapasitans C med ladning Q:

$$\boxed{U = Q_0^2/2C.}$$

Eks: Med $Q_0 = 25$ mC og $C = 25\,\mu$F er $U = 13$ J.

30) Like etter bryteren lukkes er $V_R = V_C = Q_0/C$, slik at:

$$\boxed{I_0 = Q_0/RC.}$$

Eks: Med tall som i 29 samt $R = 25$ MΩ er $I_0 = 40\,\mu$A.

31) Siden $Q(t) = Q_0 \exp(-t/RC)$, er:

$$\boxed{I(t) = dQ/dt = (-Q_0/RC)\exp(-t/RC).}$$

Eks: Med tall som over samt $t = 1200$ s er $I = 3.6\,\mu$A.

32) Vi har $U(t) = (Q_0^2/2C)\exp(-2t/RC)$. Med 20% energi igjen:

$$\boxed{t = (RC/2)\ln 5.}$$

Eks: Med tall som over er $t = 503$ s.

33) Kraft på elektronet ved angitt tidspunkt (med retning langs negativ z-akse): $F = 2ev_0B_0$. Videre er $a = v^2/r$ med $v = \sqrt{2}v_0$. N2 gir da:

$$\boxed{r = m_e v_0/eB_0.}$$

Eks: Med $v_0 = 2.5 \cdot 10^5$ m/s og $B_0 = 0.55$ T er radien i elektronets sirkelbane $r = 2.6\,\mu$m.

34) $\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$ som med $q = -e$ og oppgitte vektorer for fart og magnetfelt peker i

$$\boxed{\text{negativ } z - \text{ retning.}}$$

35) Magnetisk dipolmoment er total strøm multiplisert med omsluttet areal:

$$\boxed{m = NIA = NIa^2.}$$

Eks: Med $a = 2.0$ cm, $I = 3.0$ A og $N = 400$ viklinger er $m = 0.48$ Am^2.

36) Maksimalt dreiemoment er mB:

$$\boxed{\tau_{\max} = mB.}$$

Her er $m = NIa^2$, som med tall som i nr 35 og $B = 0.75$ T gir $\tau_{\max} = 0.36$ Nm.

37) Kondensatorladning og spolestrøm svinger begge harmonisk, med samme vinkelfrekvens $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$: $Q(t) = Q_0 \cos \omega_0 t$ og $I(t) = -\omega_0 Q_0 \sin \omega_0 t$. Det gir maksimal strømstyrke:

$$\boxed{I_{\max} = Q_0/\sqrt{LC}.}$$

Med $Q_0 = 75\,\mu$C, $L = 0.20$ H og $C = 1.0\,\mu$F: $I_{\max} = 168$ mA.

38) Strømmen er maksimal hver gang sinusfunksjonen er lik 1 i absoluttverdi. Dette skjer med intervaller lik halve perioden:

$$\boxed{T/2 = \pi/\omega_0 = \sqrt{LC}\pi.}$$

Med L og C som over: $T/2 = 1.4$ ms.

39) Strømamplituden avtar eksponentielt som $\exp(-\gamma t)$, med $\gamma = R/2L$. Tiden det tar før den er redusert til 90% av opprinnelig verdi er da bestemt av ligningen $\exp(-Rt/2L) = 0.9$, dvs:

$$\boxed{t = (2L/R)\ \ln(10/9).}$$

Med L som over og $R = 2.0$ mΩ: $t = 21$ s.

40) Analoge størrelser er hhv m, $1/k$ og b for kretsens L, C og R. Dermed:

$$\boxed{m = 0.20\,\text{kg},\ k = 10^6\,\text{N/m},\ b = 2\,\text{g/s}.}$$