

NTNU
Institutt for industriell økonomi og teknologiledelse

Faglig kontakt under eksamen:

Navn: Peter Schütz
Tlf: 980 86 185 / 73 55 13 71

EXAM IN TIØ4120 OPERASJONSANALYSE GRUNNKURS

Wednesday 3 December 2008

Time: 09:00 – 13:00

English

Allowed material:

C – Approved calculator permitted (HP 30S, Citizen SR-270X)

Deadline for examination results: 5 January 2009

Important information: The exercises are marked 1–3. See pages 2–4

EKSAMEN I TIØ4120 OPERASJONSANALYSE GRUNNKURS

Onsdag 3. desember 2008

Tid: 09:00 – 13:00

Norsk

Tillatt hjelpemiddel:

C – Godkjent kalkulator tillatt (HP 30S, Citizen SR-270X)

Sensurfrist: 5. januar 2009

Viktig informasjon: Oppgavene er nummerert fra 1–3. Se sidene 5–7

Exercise 1 (25%)

A company has a weekly production of soap and shampoo using 2 different raw materials. The amount of available raw materials per week is limited. One ton of soap requires 3 tons of raw material A and 3 tons of raw material B . It takes 4 tons of raw material A and 1 ton of raw material B to produce 1 ton of shampoo.

In addition to the two products above, the production process results in a byproduct. Each week, at least 20 tons of the byproduct have to be produced. Each week, the company has access to 70 tons of raw material A and 19 tons of raw material B .

The company has formulated the following LP for maximizing profits given the conditions above:

$$\begin{aligned} & \max 26x_1 + 15x_2 \\ & \text{subject to} \\ & \quad 4x_1 + x_2 \geq 20 \\ & \quad 3x_1 + 4x_2 \leq 70 \\ & \quad 3x_1 + x_2 \leq 19 \\ & \quad x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

- Interpret x_1 and x_2 in the optimization problem.
- How many tons of the byproduct do you get from producing one ton of soap and shampoo, respectively?
- Solve the problem with the Simplex-algorithm.
- Formulate the dual problem.
- How much can you change the profit from producing shampoo before the optimal solution changes?
- Instead of producing the byproduct, the company has the chance to buy some the byproduct in an external market. How much is the company willing to pay for 1 ton of the byproduct? How many tons should the company buy at this price?

Exercise 2 (25%)

Emil runs a small business, carving wooden figures in his spare time. He produces big and small figures. The big ones sell for 50 NOK a piece, whereas customers are willing to pay 40 NOK for a small figure. It takes him 3 hours and 2dm^3 of wood to produce a small figure, whereas he can finish a big one in just 2 hours using 5dm^3 of wood. He has 20 hours and 35dm^3 of wood available every week.

He needs some help determining how many big and small wooden figures he should carve each week in order to maximize the sales revenues (assume that all figures will be sold).

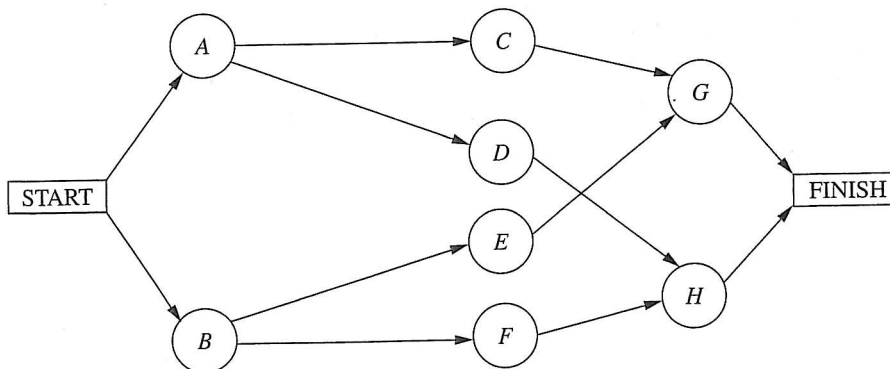
- Formulate the integer optimization problem.
- Draw the feasible region of the problem and solve it graphically.
- Solve the problem using Branch-and-Bound. Use the figure from b) to solve the LP-relaxations.

Assume now, that Emil values his spare time at 5 NOK/hour and has to spend 3 NOK per dm^3 wood.

- d) How would the optimal solution change if Emil wants to maximize profits instead of revenues? Use the figure from b).

Exercise 3 (20%)

Consider the following project network:



The activity durations are given as

Activity	a	m	b
A	28	32	36
B	22	28	34
C	26	36	46
D	14	16	18
E	32	32	32
F	12	16	26
G	12	16	26
H	16	20	24

a is the optimistic estimate for the activity duration, m is the most likely activity duration, and b is the pessimistic estimate for the activity duration.

The following formulas might be useful: $t = \frac{a + 4m + b}{6}$, $v = \left(\frac{b - a}{6}\right)^2$

- Determine the earliest possible finish time of the project and the activities on the critical path.
- What is the probability that the project will be finished after 80 weeks? Use the table for the normal distribution on page 8.
- If you were to crash the project, which activities would you start with? What do you have to consider when crashing these activities?

Exercise 4 (20%)

A gas station with only one gas pump employs the following policy: if a customer has to wait, the price is 10 NOK per liter; if she does not have to wait, the price is 12 NOK per liter. Customers arrive according to a Poisson process with a mean rate of 10 per hour. Service times

at the pump have an exponential distribution with a mean of 5 minutes. Arriving customers always wait until they can eventually buy gasoline.

Each customer purchases on average 60 liters of gasoline.

- a) Calculate the probability that there is no customer in the system, the expected amount of time a customer waits in the queue, and the expected amount of customers at the gas station (at the pump and in the queue).
- b) Determine the expected price of gasoline per liter and the expected income of operating the gas station for 10 hours.

The gas pump is getting old and no longer as reliable as it used to be. Assume that the service times are distributed according to the following probability distribution:

Service time [min]	Probability
4.0	0.40
5.0	0.30
6.0	0.20
7.0	0.10

- c) Simulate 1 hour of operations for the gas station and determine the expected price of one liter gasoline. Use the last column of random numbers of the table on page 9.
- d) How reliable are the results from the simulation?

Exercise 5 (10%)

- a) Which algorithms can you use to solve the linear assignment problem?
- b) Which algorithm would you use for solving the linear assignment problem? Explain why you prefer it over the others.

Oppgave 1 (25%)

En bedrift har en ukentlig produksjon av såpe og shampo ved hjelp av 2 ulike råvarer som det er begrenset tilgang på. Det går med 3 tonn av råvare A og 3 tonn av råvare B for å produsere ett tonn såpe. For å produsere ett tonn shampo går det med 4 tonn av råvare A og 1 tonn av råvare B .

I tillegg til de 2 produktene resulterer produksjonsprosessen i et biprodukt. Det er et krav at det produseres minst 20 tonn av biproduktet hver uke. Når det gjelder de 2 råvarene er det tilgjengelig 70 tonn av A og 19 tonn av B hver uke.

Bedriften har formulert følgende LP for å maksimere profitten under betingelsene beskrevet over:

$$\max 26x_1 + 15x_2$$

slik at

$$\begin{aligned} 4x_1 + x_2 &\geq 20 \\ 3x_1 + 4x_2 &\leq 70 \\ 3x_1 + x_2 &\leq 19 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

- Interpreter x_1 og x_2 i optimeringsproblemet.
- Hvor mange tonn av biproduktet får man ut av produksjonen av hvert tonn av henholdsvis såpe og shampo?
- Løs problemet med Simplex-algoritmen.
- Formuler dualproblemet.
- Hvor mye kan profitten per tonn shampo endres før det får en effekt på den optimale løsningen?
- I stedet for å produsere 20 tonn biprodukt kan bedriften kjøpe noe av dette i markedet. Hvor mye er bedriften villig til å betale for 1 enhet av biproduktet? Hvor mange enheter hadde bedriften kjøpt for denne prisen?

Oppgave 2 (25%)

Emil driver et lite foretak: han spikker trefigurer i sin fritid. Han produserer store og små trefigurer. De store selges for 50 NOK stykket, mens kunder er villige til å betale 40 NOK for en liten figur. Han bruker 3 timer og 2 dm³ tre for å produsere en liten figur, mens han bruker 2 timer og 5 dm³ tre for å spikke en stor figur. Han har 20 timer og 35 dm³ tre tilgjengelig hver uke.

Han trenger litt hjelp med å bestemme hvor mange store og små figurer han skal spikke hver uke for å maksimere salgsinntekten (anta at alle figurer selges).

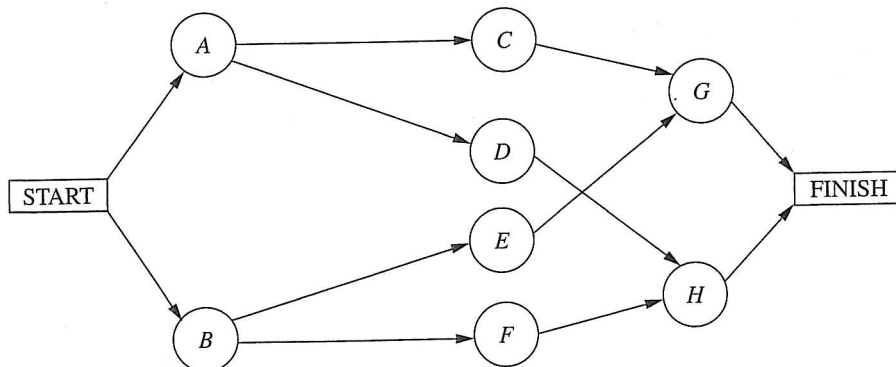
- Formuler heltalls-optimeringsproblemet.
- Tegn problemets mulighetsområdet og finn den optimale løsningen.
- Løs problemet med Branch-and-Bound. Bruk tegningen fra b) for å løse LP-relakseringene.

Anta at Emil verdsetter sin fritid med 5 NOK/time og må betale 3 NOK per dm³ ved.

- Hvordan endres den optimale løsningen hvis Emil ønsker å maksimere profitt istedenfor inntekt? Bruk tegningen fra b).

Oppgave 3 (20%)

Se på det følgende prosjektnettverket:



Varigheten for de forskjellige aktivitetene er gitt som

Aktivitet	a	m	b
A	28	32	36
B	22	28	34
C	26	36	46
D	14	16	18
E	32	32	32
F	12	16	26
G	12	16	26
H	16	20	24

a er det optimistiske estimatet for aktivitetens varighet, m er den mest sannsynlige varigheten og b er det pessimistiske estimatet for varigheten.

De følgende formlene kan være nyttige: $t = \frac{a + 4m + b}{6}$, $v = \left(\frac{b - a}{6}\right)^2$

- Beregn den tidligst mulige avslutningen av prosjektet og bestem aktivitetene på den kritiske stien (critical path).
- Hva er sannsynligheten for at prosjektet er ferdig etter 80 uker? Bruk tabellen med normalfordelingen på side 8.
- Hvilke aktiviteter ville du ha prioritert å få gjennomført raskere dersom prosjektet skulle avsluttes tidligere? Hva må du ta hensyn til når du reduserer varigheten av disse aktivitetene?

Oppgave 4 (20%)

En bensinstasjon med kun en pumpe har følgende regel for prisfastsetting: hvis kunden må vente betaler han bare 10 NOK per liter; hvis han ikke trenger å vente koster bensinen 12 NOK per liter. Kunder ankommer bensinstasjonen etter en Poisson fordeling med forventet verdi 10 per time. Pumpens betjeningstid er eksponentielt fordelt med forventet verdi 5 minutter. Ankommende kunder venter alltid til de får kjøpt bensin.

Hver kunden kjøper gjennomsnittlig 60 liter bensin.

- a) Beregn sannsynligheten for at ingen kunde er i kø-systemet, forventet ventetid i køen og forventet antall kunder ved bensinstasjonen (ved pumpe og i kø).
- b) Beregn gjennomsnittlig utsalgspris for 1 liter bensin og gjennomsnittlig inntekt til bensinstasjonen hvis stasjonen er åpen i 10 timer.

Pumpen begynner å bli gammel og er ikke like pålitelig lenger. Anta at betjeningstider er gitt av følgende sannsynlighetstetthet:

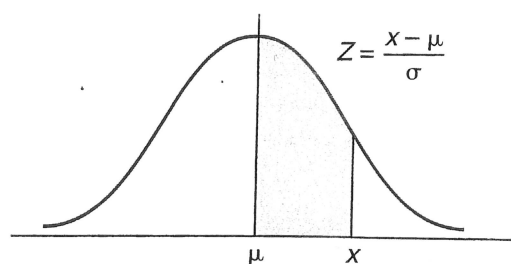
Betjeningstid [min]	Sannsynlighet
4.0	0.40
5.0	0.30
6.0	0.20
7.0	0.10

- c) Simuler 1 times drift av bensinstasjonen og beregn gjennomsnittlig utsalgspris for 1 liter bensin. Bruk den siste kolonnen i tabellen med tilfeldige tall på side 9.
- d) Hvor pålitelig er resultatene fra simuleringen?

Oppgave 5 (10%)

- a) Hvilke algoritmer kan brukes for å løse det lineære tilordningsproblemet (assignment problem)?
- b) Hvilken algoritme hadde du brukt for å løse det lineære tilordningsproblemet. Forklar hvorfor du foretrekker denne?

Normal Distribution / Normalfordeling



Z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.0000	.0040	.0080	.0120	.0160	.0199	.0239	.0279	.0319	.0359
0.1	.0398	.0438	.0478	.0517	.0557	.0596	.0636	.0675	.0714	.0753
0.2	.0793	.0832	.0871	.0910	.0948	.0987	.1026	.1064	.1103	.1141
0.3	.1179	.1217	.1255	.1293	.1331	.1368	.1406	.1443	.1480	.1517
0.4	.1554	.1591	.1628	.1664	.1700	.1736	.1772	.1808	.1844	.1879
0.5	.1915	.1950	.1985	.2019	.2054	.2088	.2123	.2157	.2190	.2224
0.6	.2257	.2291	.2324	.2357	.2389	.2422	.2454	.2486	.2517	.2549
0.7	.2580	.2611	.2642	.2673	.2704	.2734	.2764	.2794	.2823	.2852
0.8	.2881	.2910	.2939	.2967	.2995	.3023	.3051	.3078	.3106	.3133
0.9	.3159	.3186	.3212	.3238	.3264	.3289	.3315	.3340	.3365	.3389
1.0	.3413	.3438	.3461	.3485	.3508	.3531	.3554	.3577	.3599	.3621
1.1	.3643	.3665	.3686	.3708	.3729	.3749	.3770	.3790	.3810	.3830
1.2	.3849	.3869	.3888	.3907	.3925	.3944	.3962	.3980	.3997	.4015
1.3	.4032	.4049	.4066	.4082	.4099	.4115	.4131	.4147	.4162	.4177
1.4	.4192	.4207	.4222	.4236	.4251	.4265	.4279	.4292	.4306	.4319
1.5	.4332	.4345	.4357	.4370	.4382	.4394	.4406	.4418	.4429	.4441
1.6	.4452	.4463	.4474	.4484	.4495	.4505	.4515	.4525	.4535	.4545
1.7	.4554	.4564	.4573	.4582	.4591	.4599	.4608	.4616	.4625	.4633
1.8	.4641	.4649	.4656	.4664	.4671	.4678	.4686	.4693	.4699	.4706
1.9	.4713	.4719	.4726	.4732	.4738	.4744	.4750	.4756	.4761	.4767
2.0	.4772	.4778	.4783	.4788	.4793	.4798	.4803	.4808	.4812	.4817
2.1	.4821	.4826	.4830	.4834	.4838	.4842	.4846	.4850	.4854	.4857
2.2	.4861	.4864	.4868	.4871	.4875	.4878	.4881	.4884	.4887	.4890
2.3	.4893	.4896	.4898	.4901	.4904	.4906	.4909	.4911	.4913	.4916
2.4	.4918	.4920	.4922	.4925	.4927	.4929	.4931	.4932	.4934	.4936
2.5	.4938	.4940	.4941	.4943	.4945	.4946	.4948	.4949	.4951	.4952
2.6	.4953	.4955	.4956	.4957	.4959	.4960	.4961	.4962	.4963	.4964
2.7	.4965	.4966	.4967	.4968	.4969	.4970	.4971	.4972	.4973	.4974
2.8	.4974	.4975	.4976	.4977	.4977	.4978	.4979	.4979	.4980	.4981
2.9	.4981	.4982	.4982	.4983	.4984	.4984	.4985	.4985	.4986	.4986
3.0	.4987	.4987	.4987	.4988	.4988	.4989	.4989	.4989	.4990	.4990

Random Numbers / Tilfeldige tall

39 65 76 45 45	19 90 69 64 61	20 26 36 31 62	58 24 97 14 97	95 06 70 99 00
73 71 23 70 90	65 97 60 12 11	31 56 34 19 19	47 83 75 51 33	30 62 38 20 46
72 18 47 33 84	51 67 47 97 19	98 40 07 17 66	23 05 09 51 80	59 78 11 52 49
75 12 25 69 17	17 95 21 78 58	24 33 45 77 48	69 81 84 09 29	93 22 70 45 80
37 17 79 88 74	63 52 06 34 30	01 31 60 10 27	35 07 79 71 53	28 99 52 01 41
02 48 08 16 94	85 53 83 29 95	56 27 09 24 43	21 78 55 09 82	72 61 88 73 61
87 89 15 70 07	37 79 49 12 38	48 13 93 55 96	41 92 45 71 51	09 18 25 58 94
98 18 71 70 15	89 09 39 59 24	00 06 41 41 20	14 36 59 25 47	54 45 17 24 89
10 83 58 07 04	76 62 16 48 68	58 76 17 14 86	59 53 11 52 21	66 04 18 72 87
47 08 56 37 31	71 82 13 50 41	27 55 10 24 92	28 04 67 53 44	95 23 00 84 47
93 90 31 03 07	34 18 04 52 35	74 13 39 35 22	68 95 23 92 35	36 63 70 35 33
21 05 11 47 99	11 20 99 45 18	76 51 94 84 86	13 79 93 37 55	98 16 04 41 67
95 89 94 06 97	27 37 83 28 71	79 57 95 13 91	09 61 87 25 21	56 20 11 32 44
97 18 31 55 73	10 65 81 92 59	77 31 61 95 46	20 44 90 32 64	26 99 76 75 63
69 08 88 86 13	59 71 74 17 32	48 38 75 93 29	73 37 32 04 05	60 82 29 20 25
41 26 10 25 03	87 63 93 95 17	81 83 83 04 49	77 45 85 50 51	79 88 01 97 30
91 47 14 63 62	08 61 74 51 69	92 79 43 89 79	29 18 94 51 23	14 85 11 47 23
80 94 54 18 47	08 52 85 08 40	48 40 35 94 22	72 65 71 08 86	50 03 42 99 36
67 06 77 63 99	89 85 84 46 06	64 71 06 21 66	89 37 20 70 01	61 65 70 22 12
59 72 24 13 75	42 29 72 23 19	06 94 76 10 08	81 30 15 39 14	81 33 17 16 33
63 62 06 34 41	79 53 36 02 95	94 61 09 43 62	20 21 14 68 86	84 95 48 46 45
78 47 23 53 90	79 93 96 38 63	34 85 52 05 09	85 43 01 72 73	14 93 87 81 40
87 68 62 15 43	97 48 72 66 48	53 16 71 13 81	59 97 50 99 52	24 62 20 42 31
47 60 92 10 77	26 97 05 73 51	88 46 38 03 58	72 68 49 29 31	75 70 16 08 24
56 88 87 59 41	06 87 37 78 48	65 88 69 58 39	88 02 84 27 83	85 81 56 39 38
22 17 68 65 84	87 02 22 57 51	68 69 80 95 44	11 29 01 95 80	49 34 35 36 47
19 36 27 59 46	39 77 32 77 09	79 57 92 36 59	89 74 39 82 15	08 58 94 34 74
16 77 23 02 77	28 06 24 25 93	22 45 44 84 11	87 80 61 65 31	09 71 91 74 25
78 43 76 71 61	97 67 63 99 61	30 45 67 93 82	59 73 19 85 23	53 33 65 97 21
03 28 28 26 08	69 30 16 09 05	53 58 47 70 93	66 56 45 65 79	45 56 20 19 47
04 31 17 21 56	33 73 99 19 87	26 72 39 27 67	53 77 57 68 93	60 61 97 22 61
61 06 98 03 91	87 14 77 43 96	43 00 65 98 50	45 60 33 01 07	98 99 46 50 47
23 68 35 26 00	99 53 93 61 28	52 70 05 48 34	56 65 05 61 86	90 92 10 70 80
15 39 25 70 99	93 86 52 77 65	15 33 59 05 28	22 87 26 07 47	86 96 98 29 06
58 71 96 30 24	18 46 23 34 27	85 13 99 24 44	49 18 09 79 49	74 16 32 23 02
93 22 53 64 39	07 10 63 76 35	87 03 04 79 88	08 13 13 85 51	55 34 57 72 69
78 76 58 54 74	92 38 70 96 92	52 06 79 79 45	82 63 18 27 44	69 66 92 19 09
61 81 31 96 82	00 57 25 60 59	46 72 60 18 77	55 66 12 62 11	08 99 55 64 57
42 88 07 10 05	24 98 65 63 21	47 21 61 88 32	27 80 30 21 60	10 92 35 36 12
77 94 30 05 39	28 10 99 00 27	12 73 73 99 12	49 99 57 94 82	96 88 57 17 91
