

NTNU
Institutt for industriell økonomi og teknologiledelse

Faglig kontakt under eksamen:

Navn: Peter Schütz
Tlf: 980 86 185

EXAM IN TIØ4120 OPERASJONSANALYSE GRUNNKURS

Saturday 19 December 2009

Time: 09:00 – 13:00

English

Allowed material:

C – Approved calculator permitted (HP 30S, Citizen SR-270X)

Deadline for examination results: 19 January 2010

Important information: The exercises are marked 1–5. See pages 2–4

EKSAMEN I TIØ4120 OPERASJONSANALYSE GRUNNKURS

Lørdag 19. desember 2009

Tid: 09:00 – 13:00

Bokmål

Tillatt hjelpemiddel:

C – Godkjent kalkulator tillatt (HP 30S, Citizen SR-270X)

Sensurfrist: 19. januar 2010

Viktig informasjon: Oppgavene er nummerert fra 1–5. Se sidene 5–7

EKSAMEN I TIØ4120 OPERASJONSANALYSE GRUNNKURS

Laurdag 19. desember 2009

Tid: 09:00 – 13:00

Nynorsk

Tillatte hjelpemiddel:

C – Godkjend kalkulator tillaten (HP 30S, Citizen SR.-270X)

Sensurfrist: 19. januar 2010

Viktig informasjon: Oppgåvene er nummererte frå 1–5. Sjå sidene 8–10

Exercise 1 (30%)

A company produces one single product type. Four different production facilities are available with the following variable production costs 4, 5, 5, and 1 (in 1000 NOK/ton). The company has committed to producing exactly 100 tons in each period. Additionally, the company has committed to using at least 40 tons of waste product A in each period. The four production facilities consume 0.3, 0.5, 0.6, and 0.2 tons of A to produce one ton of the finished product.

- a) Formulate the company's cost minimization problem as a linear programming problem.
- b) What can you say about the number of used production facilities without solving the problem?
- c) Solve the problem with the Simplex-algorithm.
- d) How much does the supplier of the waste product have to pay to the company so that they are willing to use one more ton of A?
- e) How much can you increase production without starting new facilities or stopping production in plants found in c)?

Assume that the production costs at facilities 1 and 4 both increase with d (in 1000 NOK/ton).

- f) How much can you change d without changing the solution from c)?

Exercise 2 (20%)

Suppose a company has two machines for manufacturing a product. Machine 1 makes two units per hour, while machine 2 makes three per hour. The company has an order for 100 units. Energy restrictions dictate that only one machine can operate at one time. The company has 40 hours of regular machining time, but overtime is available. It costs 40 NOK to run machine 1 for one hour, whereas machine 2 costs 50 NOK. The company has the following goals:

1. Meet the demand of 100 unit exactly.
 2. Use the 40 hours of machining time.
 3. Minimize costs
- a) Formulate the goal programming problem.
 - b) Solve the problem graphically.

Assume now, that the company introduces a new goal: limiting overtime usage to 10 hours. This new goal is assigned priority 2.

- c) Formulate the new goal programming problem.
- d) Among the methods used in multicriteria decision making, we also find the Analytical Hierarchy Process (AHP). Explain the difference between Goal Programming and AHP.

Exercise 3 (25%)

A company has 4 production facilities with limited capacity to produce one single product. The company has three different suppliers that can only supply a limited amount of raw materials. It takes one unit of raw material to produce one unit of finished product.

The raw materials are not identical, neither are the production facilities. Hence, the variable production cost depends both on the raw material r and production facility p (See Table 1). The

Table 1: Variable production cost in 1000 NOK

	$p = 1$	$p = 2$	$p = 3$	$p = 4$
$r = 1$	5	4	9	5
$r = 2$	6	3	6	4
$r = 3$	4	2	6	2

capacities at the production facilities are given as 30, 60, 30, and 30 units, respectively. For the next planning period, the company can acquire raw materials in the amount of 65, 65, and 50 units. The company has committed to producing 150 units during the next planning period. Assume that the company wishes to minimize the variable production costs in the next planning period.

- Formulate the planning problem as an ordinary transportation problem.
- Solve the problem.
- In case the price for the finished product drops, the company would like to reduce its production commitment. In which facility should the company reduce production first?
- A problem with the production equipment causes the costs to increase with 1000 NOK at facility 1. What are the consequences for the optimal solution found in c)?

Exercise 4 (15%)

A company uses 4 units of energy, x_e , to produce 1 ton of finished product y . The price for one unit of energy, w_e , depends on the total amount of energy consumed in each period and is given by the following function:

$$w_e = 50 + 0.01x_e.$$

The company can only use 500 units of energy in each period. In addition to the energy, the company needs raw materials for 2200 NOK to produce 1 ton of the finished product. These raw materials have unlimited availability.

The price p for the finished product y in the market depends on the production amount and is given by the following function:

$$p = 4200 - 0.4y.$$

Assume that company wishes to find the profit-maximizing production plan.

- Formulate the planning problem as nonlinear optimization problem.
- Solve the planning problem with the Lagrangian multiplier method.
- Which other methods for solving nonlinear optimization problems can be used? Explain their advantages and disadvantages.

Exercise 5 (10%)

Consider the following cost matrix:

$$C = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 7 & 3 & 6 \\ 1 & 3 & 5 & 8 & 4 \\ 0 & 6 & 5 & 7 & 2 \\ 3 & 5 & 6 & 3 & 6 \\ 9 & 3 & 4 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Solve the Linear Assignment Problem with a suitable method such that the assignment costs are minimized.

Oppgave 1 (30%)

En bedrift produserer én produkttype. Til produksjonen disponerer bedriften 4 ulike anlegg hvor de variable produksjonskostnadene pr. tonn er henholdsvis 4, 5, 5 og 1 (i 1000 NOK). Bedriften har forpliktet seg til å produsere akkurat 100 tonn pr. periode. Videre har bedriften forpliktet seg å bruke minst 40 tonn av avfallsstoff A pr. periode. I de fire anleggene medgår det henholdsvis 0.3, 0.5, 0.6 og 0.2 tonn A pr. tonn produkt.

- a) Formuler bedriftens kostnadsminimeringsproblem som et lineært programmeringsproblem..
- b) Kan du si noe om antall anlegg i bruk uten å løse problemet?
- c) Løs problemet med Simplex-metoden.
- d) Hvor mye må avfallsleverandøren betale for at bedriften skal være villig til å bruke et tonn mer av A?
- e) Hvor mye kan produksjonen økes uten å starte anlegg som ikke er i bruk eller stoppe produksjon i anleggene funnet i c)?

Anta at kostnadene pr. tonn i anlegg 1 og 4 begge øker med d (i 1000 NOK).

- f) Hvor stor kan d bli uten at løsningen i c) må endres?

Oppgave 2 (20%)

Anta at en bedrift har 2 maskiner for å produsere ett produkt. Maskin 1 produserer 2 enheter pr. time, mens maskin 2 produserer 3 enheter pr. time. Bedriften har fått en ordre på 100 enheter. Grunnet bekrankning på tilgjengelig energi kan kun en maskin brukes om gangen. Bedriften har 40 timer regulær maskineringsstid tilgjengelig, men overtid kan benyttes. Det koster 40 NOK pr. time å bruke maskin 1, mens maskin 2 koster 50 NOK/time. Bedriften har følgende mål:

1. Dekke etterspørselen for nøyaktig 100 enheter.
 2. Bruke 40 timer regulær maskineringsstid.
 3. Minimere kostnadene.
- a) Formuler målprogrammeringsproblemet (goal programming problem).
 - b) Løs problemet grafisk.

Anta at bedriften introduserer et nytt mål: begrenset bruk av overtid til 10 timer. Det nye målet får prioritet 2.

- c) Formuler det nye målprogrammeringsproblemet.
- d) Blant metodene for multikriterie beslutningstaking (multicriteria decision making) finner vi også den analytiske hierarki prosessen (Analytical Hierarchy Process – AHP). Skisser forskjellen mellom mål programmering (Goal Programming) og AHP.

Oppgave 3 (25%)

En bedrift har 4 produksjonsanlegg med begrenset kapasitet for fremstilling av samme produkt. Bedriften har 3 råstoffleverandører som hver bare kan levere en begrenset mengde råstoff. Det trenges en enhet råstoff pr. enhet ferdig produkt.

Råstoffene er ikke identiske, det er heller ikke produksjonsanleggene. De variable produksjonskostnadene avhenger derfor av både råstoff r og anlegg p (Se Tabell 2).

Table 2: Variable produksjonskostnader i 1000 NOK

	$p = 1$	$p = 2$	$p = 3$	$p = 4$
$r = 1$	5	4	9	5
$r = 2$	6	3	6	4
$r = 3$	4	2	6	2

Produksjonskapasitetene er gitt som henholdsvis 30, 60, 30 og 30 enheter. I neste planleggingsperiode kan råstoffleverandørene levere henholdsvis 65, 65, and 50 enheter. Bedriften har forpliktet seg til å levere 150 enheter ferdig produkt i neste periode. Forutsett at bedriften ønsker å minimere de variable produksjonskostnadene i neste periode.

- Formuler planleggingsproblemet som ordinært transportproblem.
- Løs problemet.
- I tilfellet prisen for produktet faller, ønsker bedriften å redusere sin leveringsforpliktelse. I hvilket anlegg vil bedriften først redusere produksjonsmengden?
- Grunnet problemer med produksjonsutstyr øker de variable produksjonskostnadene med 1000 NOK ved anlegg 1. Hvilke konsekvenser har dette for den optimale løsingen funnet i c)?

Oppgave 4 (15%)

En bedrift bruker 4 enheter energi, x_e , pr. ton ferdig produkt y . Prisen for en enhet energi, w_e , avhenger av forbruket i perioden, og er gitt som:

$$w_e = 50 + 0.01x_e.$$

Bedriften kan kun bruke 500 enheter energi pr. periode. I tillegg til energi trenger bedriften råvarer for 2200 NOK pr. ton ferdig produkt. Tilgang til råvarene er ubegrenset. Markedsprisen p for produkt y avhenger av produksjonsmengden, og er gitt som :

$$p = 4200 - 0.4y.$$

Forutsett at bedriften ønsker å finne produksjonsplanen som maksimerer overskuddet.

- Formuler planleggingsproblemet som ikke-lineær optimerings problem.
- Løs planleggingsproblemet med Lagrange multiplikator metoden (Lagrangian multiplier method).
- Hvilke andre metoder for å løse ikke-lineære optimerings problemer kan brukes? Skisser fordelene og ulempene.

Oppgave 5 (10%)

Se på kostnadsmatrisen under:

$$C = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 7 & 3 & 6 \\ 1 & 3 & 5 & 8 & 4 \\ 0 & 6 & 5 & 7 & 2 \\ 3 & 5 & 6 & 3 & 6 \\ 9 & 3 & 4 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Løs det lineære tilordningsproblemet (linear assignment problem) med egnet metode slik at tilordningskostnadene minimeres.

Oppgave 1 (30%)

Ei bedrift produserer ein produkttype. Til produksjonen disponerer bedrifta 4 ulike anlegg der dei variable produksjonskostnadene pr. tonn er henholdsvis 4, 5, 5 og 1 (i 1000 NOK). Bedrifta har forplikta seg til å produsere akkurat 100 tonn pr. periode. Vidare har bedrifta forplikta seg til å bruke minst 40 tonn av avfallsstoff A pr. periode. I dei fire anlegga medgår det henholdsvis 0.3, 0.5, 0.6 og 0.2 tonn A pr. tonn produkt.

- a) Formuler kostnadsminimeringsproblemet til bedriften som eit lineært programmeringsproblem.
- b) Kan du seie noko om mengda anlegg i bruk utan å løyse problemet?
- c) Løs problemet med Simplex-metoden.
- d) Kor mykje må avfallsleverandøren betale for at bedrifta skal vere villig til å bruke eit tonn meir av A?
- e) Kor mykje kan produksjonen aukast utan å starte anlegg som ikkje er i bruk eller stoppe produksjon i anlegga funnen i c)?

Tru at kostnadene pr. tonn i anlegg 1 og 4 begge aukar med d (i 1000 NOK).

- f) Kor stor kan d bli utan at løysinga i c) må endrast?

Oppgave 2 (20%)

Tenk deg at ei bedrift har 2 maskiner for å produserer eitt produkt. Maskin 1 produserer 2 delar pr. time, mens maskin 2 produserer 3 delar pr. time. Bedrifta har fått ein ordre på 100 delar. Grunna begrensning på tilgjengeleg energi kan berre ei maskin brukast om gongen. Bedrifta har 40 timar regulær maskineringstid tilgjengeleg, men overtid kan nyttast. Det kostar 40 NOK pr. time å bruke maskin 1, mens maskin 2 kostar 50 NOK/time. Bedrifta har følgjande mål:

1. Dekke etterspurnaden for nøyaktig 100 delar.
 2. Bruke 40 timar regulær maskineringstid.
 3. Minimere kostnadane.
- a) Formuler målprogrammeringsproblemet (goal programming problem).
 - b) Løys problemet grafisk.

Tenk deg at bedrifta introduserer eit nytt mål: begrenns bruk av overtid til 10 timar. Det nye målet får prioritet 2.

- c) Formuler det nye målprogrammeringsproblemet.
- d) Blant metodane for multikriterie-beslutningstaking (multicriteria decision making) finn vi også det analytiske hierarkiet prosessen (Analytical Hierarchy Process – AHP). Skisser forskjellen mellom målprogrammering (Goal Programming) og AHP.

Oppgave 3 (25%)

Ei bedrift har 4 produksjonsanlegg med begrensa kapasitet for framstilling av same produkt. Bedrifta har 3 råstoffleverandørar som kvar berre kan levere ein begrensa mengje råstoff. Det trengst ein del råstoff pr. del ferdig produkt.

Råstoffa er ikkje identiske, det er heller ikkje produksjonsanlegga. Dei variable produksjonskostnadane avheng derfor av både råstoff r og anlegg p . (Se Tabell 3).

Table 3: Variable produksjonskostnader i 1000 NOK

	$p = 1$	$p = 2$	$p = 3$	$p = 4$
$r = 1$	5	4	9	5
$r = 2$	6	3	6	4
$r = 3$	4	2	6	2

Produksjonskapasitetane er gitte som henholdsvis 30, 60, 30 og 30 delar. I neste planleggingsperiode kan råstoffleverandørane levere henholdsvis 65, 65, and 50 delar. Bedrifta har forplikta seg til å levere 150 delar ferdig produkt i neste periode. Føreset at bedrifta ønskjer å minimere dei variable produksjonskostnadane i neste periode.

- Formuler planleggingsproblemet som ordinært transportproblem.
- Løys problemet.
- I tilfelle prisen for produktet fell, ønskjer bedrifta å redusere sin leveringsforpliktelse. I kva anlegg vil bedrifta fyrst redusere produksjonsmengda?
- På grunn av problem med produksjonsutsyr, aukar dei variable produksjonskostnadane med 1000 NOK ved anlegg 1. Kva konsekvensar har dette for den optimale løysinga funne i c)?

Oppgave 4 (15%)

Ei bedrift bruker 4 delar energi, x_e , pr. tonn ferdig produkt y . Prisen for ein del energi, w_e , avheng av brukt i perioden, og er gitt som:

$$w_e = 50 + 0.01x_e.$$

Bedrifta kan berre bruke 500 delar energi pr. periode. I tillegg til energi treng bedrifta råvarer for 2200 NOK pr. tonn ferdige produkt. Tilgang til råvarene er uavgrensa. Marknadsprisen p for produkt y avheng av produksjonsmengda, og er gitt som:

$$p = 4200 - 0.4y.$$

Tenk deg at bedrifta ønskjer å finne produksjonsplanen, som maksimerer overskotet.

- Formuler planleggingsproblemet som et ikkje-lineært optimeringsproblem.
- Løys planleggingsproblemet med Lagrange-multiplikatormetoden (Lagrangian multiplier method).
- Kva for andre metodar for å løyse ikkje-lineære optimeringsproblem kan brukast? Skisser fordelane og ulempene.

Oppgave 5 (10%)

Sjå på kostnadsmatrisa under:

$$C = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 7 & 3 & 6 \\ 1 & 3 & 5 & 8 & 4 \\ 0 & 6 & 5 & 7 & 2 \\ 3 & 5 & 6 & 3 & 6 \\ 9 & 3 & 4 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Løys det lineære tilordningsproblemet (linear assignment problem) med eigna metode, slik at tilordningskostnadene blir minimerte.