

Institutt for industriell økonomi og teknologiledelse

Eksamensoppgave i TIØ4120 Operasjonsanalyse, gk.

Faglig kontakt under eksamen: Anders Gullhav

Tlf.: 90 92 71 00

Eksamensdato: 05.08.2013

Eksamenstid (fra-til): 09.00 – 13.00

**Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: C (godkjent kalkulator og K. Rottmann:
«Matematisk formelsamling»)**

Annen informasjon:

Sensurfrist: 19.08.2013

Målform/språk: Bokmål

Antall sider: 5

Antall sider vedlegg: 0

Kontrollert av:

Dato

Sign

Oppgave 1 (vekt 40 %)

Du har blitt utnevnt til studentassistent i TIØ4120, og hjelper studentene med ukens øvingsoppgave. Introduksjonen til øvingen lyder som følger:

Bedriften Møbleringen AS produserer én type stol og én type bord, og ønsker å ta optimale produksjonsbeslutninger. Etterspørselen av stoler består av en fast etterspørsel på 10 enheter per produksjonsperiode, samt en ytterligere etterspørsel på 3 stoler per bord som selges per periode.

Bedriften bruker en spesiell type maskin som har nok kapasitet per periode til å produsere enten 50 stoler eller 50 bord eller en konveks kombinasjon av dette.

Møblene inneholder eik, henholdsvis 4 enheter per bord og 2 enheter per stol, og bedriften har en avtale med en leverandør om å kjøpe inn 120 enheter hver produksjonsperiode.

Bedriften har en profitt på 40 kroner per bord og 55 kroner per stol som selges. Den har også gjort en avtale om å kunne levere minst 5 bord i kommende periode.

- a) Første oppgave på øvingen var å sette opp en lineærprogrammeringsmodell for problemet. Studentene Per og Kari har tydeligvis arvet en gammel besvarelse, og har derfor tilgang til en modell. Dessverre forstår de den ikke helt, og din oppgave blir derfor som følger: vis at problemet til Møbleringen AS beskrevet over kan formuleres som følger:

$$\max Z = 40x_1 + 55x_2 \quad (1)$$

$$x_1 + x_2 \leq 50 \quad (2)$$

$$x_2 \leq 3x_1 + 10 \quad (3)$$

$$4x_1 + 2x_2 \leq 120 \quad (4)$$

$$x_1 \geq 5 \quad (5)$$

$$x_2 \geq 0 \quad (6)$$

- b) Neste punkt i øvingen er å regne ut optimal løsning av modellen over. Per og Kari står også fast her, men skjønner at de skal testes i big-M metoden: sett opp problemet på utvidet form ved å innføre slakkvariabler, overskuddsvariabler og kunstvariabler. Bruk big-M metoden til å finne en basis som er tillatt for det opprinnelige problemet.

Etter å ha fått en tillatt startbasis overlater du Per og Kari til seg selv igjen. Som flittige studenter regner de hver for seg videre fra tablået du overlot til dem. Per kommer da frem til følgende tablå (du må selv tolke hva de forskjellige variablene betyr):

BV	Z	x1	x2	s1	s2	s3	s4	a4	RHS
Z	1	0	0	0	15/4	0	0	M	2600
s4	0	0	0	1/4	-1/4	0	1	-1	5
x2	0	0	1	3/4	1/4	0	0	0	40
s3	0	0	0	-10/4	10/4	1	0	0	0
x1	0	1	0	1/4	-1/4	0	0	0	10

Kari kommer tilsvarende frem til følgende tablå:

BV	Z	x1	x2	s1	s2	s3	s4	a4	RHS
Z	1	0	0	0	55	205/10	0	M	2600
s1	0	0	0	1	-1	-4/10	0	0	0
x2	0	0	1	0	1	3/10	0	0	40
s4	0	0	0	0	0	1/10	1	-1	5
x1	0	1	0	0	0	1/10	0	0	10

- c) Per og Kari klarer ikke å finne noen feil i beregningene sine og spør hvorfor de får forskjellige tablå. Du ser at ingen av dem har gjort beregningsfeil: forklar så godt du kan hvorfor de likevel får forskjellige optimale tablå.
- d) Hva er optimal løsning på problemet til Møbleringen AS? Finnes det alternative optimale løsninger?

Selv om øvingsoppgaven nå er fullført har Per og Kari noen oppfølgingsspørsmål. De har nemlig begynt å lære om sensitivitetsanalyse. Kari kommer med følgende mulige scenario som du må svare på:

- e) Dersom Møbleringen AS kan påvirke den faste etterspørselen av stoler (det vil si at den faste etterspørselen blir $10+\Delta$ i stedet for 10), hva blir den økonomiske effekten av dette? For hvilke Δ kan vi si noe om dette?

Oppgave 2 (vekt 40 %)

I denne oppgaven skal vi studere køen av klienter hos et legekantor med en enkelt lege, hvor klientene ikke har timeavtaler, men blir betjent i den rekkefølgen de ankommer. Klientene ankommer legekantoret i henhold til en Poisson-fordeling med en rate på λ ankomster per time og blir betjent av legen hvor betjeningstiden er eksponentialfordelt med forventning $1/\mu$. Vi antar at selve betjeningen (dvs. behandlingen) hos legen er gratis, men klientene anses å bli påført en kostnad, C , per time i systemet (køtid + betjeningstid). Når en klient har blitt betjent mottar den en belønning, R . For enkelhets skyld, antar vi at C og R er like for alle klienter. Anta også at $\lambda \neq \mu$.

Når en klient ankommer legekantoret må den gjøre ett av to valg: enten (i) entrer den køen og blir påført kostnader C per time i systemet og mottar til slutt en belønning R ; eller (ii) entrer den ikke køen (og går sin vei) uten kostnader eller belønning. Ved ankomst og før den tar beslutningen, kan klienten observere antallet klienter som allerede er i systemet og beslutter valget som gir høyest netto gevinst (belønning – kostnad).

- a) La n være det minste antall klienter allerede i systemet som gjør at en nyankommet klient velger å **ikke** entre køen. Vis at dette antallet kan uttrykkes som $n = \left\lfloor \frac{R\mu}{C} \right\rfloor$. Vi antar at $\left\lfloor \frac{R\mu}{C} \right\rfloor \geq 1$.

(Merk: $\lfloor x \rfloor$ er det største heltallet mindre enn eller lik x .)

b) Tegn køsystemet som en fødsels- og dødsprosess. Av de køsystemene du har kjennskap til fra pensum, hvilket køsystem synes du passer best til beskrivelsen av systemet i denne oppgaven. Begrunn svaret og uttrykk køsystemet ved hjelp av Kendalls notasjon.

c) Vis at sannsynligheten for at det er i klienter i dette systemet kan uttrykkes som:

$$p_i = \frac{\rho^i(1 - \rho)}{1 - \rho^{n+1}}, \quad \text{hvor } \rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

(Hint: start med å finne uttrykk for p_0)

d) Finn et uttrykk for sannsynligheten for at en klient velger å entre køen.

La λ være 5 klienter per time, μ være 4 klienter per time, R være 100 og C være 50.

e) Hva er forventet tid en klient bruker gjennom systemet (køtid + betjeningstid) dersom den velger å entre køen?

(Hint: Utrykk for forventet antall i systemet, L , er oppgitt for flere typer køsystem under)

Anta nå at klientene ikke kan velge å gå til legekantoret for å observere kølengden før de tar beslutningen om de vil entre køen eller ikke. Derimot har alle klientene, basert på tidligere erfaring, informasjon om forventet antall klienter på legekantoret, og tar dermed en beslutning om å gå til legekantoret, eller ikke, mens de er hjemme. Du kan anta at klientene tar sin beslutning basert på forventet netto gevinst, og at alle klientene har samme informasjon om forventet antall klienter i systemet. På denne måten vil den faktiske ankomstraten, γ ($\leq \lambda$), reguleres av klientens beslutninger.

f) Hva slags køsystem har vi nå? Har vi det samme som i deloppgavene a) – e)? Begrunn svaret og uttrykk køsystemet ved hjelp av Kendalls notasjon.

g) Finn et uttrykk for γ .

h) Hva er forventet tid en klient bruker i dette svaret? Bruk samme parametre som i deloppgave e)

Formel for forventet antall i systemet for forskjellige typer køsystemer

s = antall betjeningsstasjoner, K = maksimalt antall i systemet, N = populasjonens størrelse (når endelig, dvs. $N < \infty$), λ = ankomstrate, μ = betjeningsrate.

$$M/M/1: \quad L = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$$

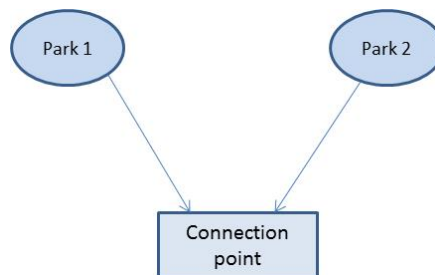
$$M/M/s: \quad L = \frac{p_0(\lambda/\mu)^s \rho}{s!(1-\rho)^2} + \frac{\lambda}{\mu}$$

$$M/M/1/K: \quad L = \frac{\rho}{1-\rho} - \frac{(n+1)\rho^{n+1}}{1-\rho^{n+1}}$$

$$M/M/1/K/N: \quad L = N - \frac{\mu}{\lambda}(1 - p_0)$$

Oppgave 3 (vekt 20 %)

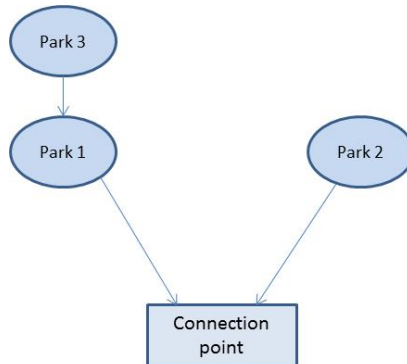
Bedriften FarOff Limited satser på utbygging av offshore vindmølleparker for produksjon av elektrisitet og har fått konsesjon for å etablere to nye parker. De er imidlertid usikker på hvor mange vindmøller det er optimalt å plassere i hver av disse parkene. I tillegg må det bestemmes hvilken overføringskabel en skal ha fra hver av de to vindmølleparkene til et tilkoblingspunkt til strømmettet på land. Problemet kan illustreres som følger:



Du er leid inn som konsulent for å hjelpe FarOff Limited med dimensjoneringen av de to vindmølleparkene. Du har fått tilgang til følgende informasjon og data fra bedriften:

- Effekten som produseres av vindmøller varierer naturlig nok med vinden. Her antar vi imidlertid at det er kapasitet lokalt i hver vindmølle til å lagre overskuddsenergi som kan overføres i perioder med mindre vind. Det betyr at vi i denne oppgaven forenklet kan regne med gjennomsnittsverdier.
 - Det er kun én type vindmølle som er aktuell å benytte i begge de to vindmølleparkene, hver av disse forventes å produsere i gjennomsnitt P_i kilowatt dersom den plasseres i park i . Kostnaden per mølle er beregnet til C^M .
 - Konsesjonskravene gir en øvre begrensning på N vindmøller i hver av de to parkene.
 - Det fins L ulike aktuelle typer overføringskabler for begge de to parkene, hvor C_{ii}^l er kostnaden for overføringskabel l for vindmøllepark i (pga. ulike distanse inn til land kan disse variere mellom de to ulike parkene).
 - En kan ikke totalt produsere mer strøm (i gjennomsnitt) fra hver vindmøllepark enn overføringskapasiteten tillater. Overføringskapasiteten for linje l er beregnet til å være Q_l kilowatt. Det kan kun benyttes én overføringskabel fra hver vindmøllepark.
 - FarOff Limited har kontraktsforpliktelser om å levere (gjennomsnittlig) minst D kilowatt til sammen fra de to vindmølleparkene.
- a) Modeller beslutningsproblemet for å bestemme optimalt antall vindmøller i hver vindmøllepark, samt hvilken overføringskabel en skal ha fra hver av parkene, som et heltallsprogrammeringsproblem. Bruk summasjonsform og anta at bedriften ønsker å minimere kostnader. Definer de variablene du behøver og ta for øvrig utgangspunkt i parametrene og begrensningene angitt over. Modellen skal holdes lineær.

FarOff Limited får en forespørsel om å etablere en tredje vindmøllepark til en kostnad på C^I . Siden denne er i nærheten av vindmøllepark 1, kan denne kobles sammen med denne slik at de kan ha felles overføringskabel inn til land. Det må da i så fall legges en overføringskabel mellom den nye tredje vindmølleparken og den første, men en kan forvente at denne er mye billigere pga. av den korte avstanden. Dette kan nå illustreres som følger:



- b) Modeller det nye beslutningsproblemet der du i tillegg til det du tok med i oppgave a) også tar med beslutningen om bedriften bør etablere den tredje vindmølleparken, samt hvor mange vindmøller de skal ha der og hvilken overføringskabel de bør velge mellom denne og den første.