NORGES TEKNISK-NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
INSTITUTT FOR INDUSTRIELL ØKONOMI OG TEKNOLOGILEDELSE

Faglig kontakt under eksamen:
Navn: Anders Nordby Gullhav // Lars Magnus Hvattum
Tlf.: 909 27 100 // 45 22 51 41

EKSAMEN I TIØ4120 OPERASJONSANALYSE, GK

Torsdag 8. desember 2011
Tid: kl. 1500 – 1900
(Bokmål)

Tillatte hjelpemidler: C - Godkjent kalkulator og K.Rottmann: "Matematisk formelsamling".

Sensurfrist: 9. januar, 2012

Oppgave 1

En produsent av wienerpølser skal kjøpe inn råvarer til neste måneds produksjon. Pølsene kan inneholde maksimalt 13 % fett og 20 % vann. Produsenten har mulighet til å kjøpe inn fra tre ulike leverandører som leverer kjøtt av ulik kvalitet og pris. Tabellen under angir fett- og vann-innhold for hver produsent samt pris per kg.

Leverandør	Fettinnhold (%)	Vanninnhold (%)	Pris (kr per kg)
1	14	22	35
2	12	21	42
3	13	18	49

Salgsavdelingen har meldt inn et behov på minimum 7000 kg pølser i neste måned.

a) Gitt at produsenten ønsker å minimere sine innkjøpskostnader, vis at problemet med å bestemme mengden som skal kjøpes inn fra hver leverandør, kan løses ved følgende lineære optimeringsproblem:

$$\begin{array}{rl} \text{minimer} & Z = 35x_1 + 42x_2 + 49x_3 \\ \text{forutsatt at} & x_1 - x_2 \leq 0 \\ & 2x_1 + x_2 - 2x_3 \leq 0 \\ & x_1 + x_2 + x_3 \geq 7000 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{array}$$

b) Skriv problemet formulert i oppgave a) på standardform og bruk dette til å finne det duale problemet.

Med utgangspunkt i problemet på standardform kan man løse problemet ved hjelp av simpleksmetoden og få følgende optimale basisliste

$$
\begin{array}{l}
Z = -301000 - 2x_4 - 3x_5 - 43x_6 \\
\hline
x_1 = 2000 - \frac{3}{7}x_4 - \frac{1}{7}x_5 + \frac{2}{7}x_6 \\
x_2 = 2000 + \frac{4}{7}x_4 - \frac{1}{7}x_5 + \frac{2}{7}x_6 \\
x_3 = 3000 - \frac{1}{7}x_4 + \frac{2}{7}x_5 + \frac{3}{7}x_6
\end{array}
$$

hvor x_4, x_5 og x_6 er slakkvariabler i beskrankningene. Alternativt kan det skrives på tabellform som

Basis	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	h.s.
Z	1	0	0	0	2	3	43	−301000
x_1	0	1	0	0	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{7}$	$-\frac{2}{7}$	2000
x_2	0	0	1	0	$-\frac{4}{7}$	$\frac{1}{7}$	$-\frac{2}{7}$	2000
x_3	0	0	0	1	$\frac{1}{7}$	$-\frac{2}{7}$	$-\frac{3}{7}$	3000.

c) Bruk denne informasjonen til å finne optimal verdi og optimal løsning av problem i a), samt den optimale løsningen til det duale problemet.

d) Hva vil den optimale løsningen være hvis behovet øker til 10 500 kg? Vis generelt at $x_1 = x_2 = \frac{2}{3} x_3$ i den optimale løsningen for alle mulige behov større eller lik 0.

e) Leverandør 1 endrer i siste liten sin pris fra 35 kr per kg til 42 kr per kg. Finn på enklest mulig måte den nye optimale løsningen.

Oppgave 2

Det lille drosjeselskapet Trondhjemstaxi disponerer tre drosjebiler. Selskapet benytter i helgene sin egen holdeplass, og drosjene returnerer alltid tilbake til denne holdeplassen etter hver tur. I de beste periodene i helgene kjører alle tre bilene uten innlagte pauser. Trondhjemstaxi ønsker å analysere driften og hvordan de kan øke inntjeningen.

Periodene med god etterspørsel som de ønsker å analysere har en varighet på 4 timer. Tiden det tar å kjøre en kunde hjem og så komme tilbake til holdeplassen antas å være eksponensialfordelt med en forventning på 30 minutter. Potensielle kunder ankommer i henhold til en Poisson-fordeling, med forventning på 8 kunder per time. Hvis det ikke er noen biler på holdeplassen rusler de potensielle kundene videre til andre holdeplasser i nærheten. Det er derfor aldri kunder ved holdeplassen som venter på en ledig taxi.

a) Formuler Trondhjemstaxi sin drift ut fra holdeplassen som en kømodell. Tegn diagram for den tilhørende fødsels- og dødsprosessen. Hva slags kømodell blir dette?

b) Utled formler (uten å sette inn tall) for alle P_n.

c) Hvor stor andel av tiden er alle tre drosjebilene parkert på holdeplassen?

Trondhjemstaxi tar kr 100,- per tur, pluss kr 20,- per minutt med passasjer i bilen.

d) Hva er forventet inntekt per time i periodene med god etterspørsel?

Eieren av Trondhjemstaxi stiller seg tvilende til om eksponensialfordelingen er riktig å bruke for tiden det tar fra en drosjebil forlater holdeplassen til den er tilbake igjen. Eieren mener at den typiske varigheten er 20 minutter, at minimum er 10 minutter og at turene tar mindre enn én time. På bakgrunn av dette bestemmer du deg for å lage en simuleringsmodell, der tiden for hver tur har en triangulærfordeling med følgende tetthetsfunksjon:

$$f(x) = \begin{cases} (x-10)/250 & hvis \quad 10 \leq x \leq 20 \\ (60-x)/1000 & hvis \quad 20 \leq x \leq 60 \\ 0 & ellers \end{cases}$$

e) Forklar hvordan du ved hjelp av en metode fra pensum vil generere tilfeldige observasjoner fra denne fordelingen. Du kan anta at en metode for å generere tilfeldige uniformt fordelte tall fra et intervall [*a*, *b*] er tilgjengelig.

<u>Oppgave 3</u>

En bedrift produserer og selger to forskjellige produkt. Bedriften kan selv sette prisen på produktene, og etterspørselen er gitt som en funksjon av disse prisene som følger:

$$x_1 = 20 - 2p_1$$

$$x_2 = 60 - \frac{3}{2}p_2$$

der p_1 og p_2 er prisene for henholdsvis produkt 1 og 2, og x_1 og x_2 er etterspørselen.

Produksjonskapasiteten til bedriften er begrenset i to av avdelingene, hvor det er henholdsvis 50 og 60 dagsverk tilgjengelig. Produksjon av én enhet produkt 1 krever 2 dagsverk i avdeling 1 og 1 dagsverk i avdeling 2. Produksjon av én enhet produkt 2 krever 1 dagsverk i hver av avdelingene.

a) Anta at bedriften ønsker å maksimere sin salgsinntekt. Formuler bedriftens ønske som et ikke-lineært optimeringsproblem med x_1 og x_2 som beslutningsvariabler.

b) Formuler KKT-betingelsene for problemet.

c) Vil en løsning som tilfredsstiller KKT-betingelsene i dette tilfellet nødvendigvis være et globalt optimum? Begrunn svaret.

d) Sett opp problemet over slik at det kan løses ved hjelp av modifisert simplex.