LØSNINGSFORSLAG EKSAMEN HØST 2011 I TIØ4120 OPERASJONSANALYSE, GRUNNKURS

Oppgave 1

a) Vi lar x_1, x_2 og x_3 være antall kg kjøpt inn fra leverandør 1, 2 og 3. Innkjøpskostnadene blir da $Z = 35x_1 + 42x_2 + 49x_3$. Minimumsbehovet på 7000 kg må dekkes og kan modelleres ved beskrankningen $x_1 + x_2 + x_3 \geq 7000$.

Det gjenstår dermed å sørge for at vi overholder kravene til fett- og vanninnhold. Hvis vi ser på den totale fettmengden i de innkjøpte råvarene så er den lik $0.14x_1 + 0.12x_2 + 0.13x_3$. Dette må ikke overstige 13 % av den totale vekten, dvs. $0.13(x_1 + x_2 + x_3)$. Vi får dermed at

$$14x_1 + 12x_2 + 13x_3 \leq 13(x_1 + x_2 + x_3)$$

som kan forenkles til

$$x_1 - x_2 \leq 0.$$

Tilsvarende beregning for vann gir $2x_1 + x_2 - 2x_3 \leq 0$. Til sammen med ikke-negative verdier for variablene gir dette følgende lineære optimeringsproblem

$$\begin{array}{rl}
\text{minimer} & Z = 35x_1 + 42x_2 + 49x_3 \\
\text{forutsatt at} & x_1 - x_2 \leq 0 \\
& 2x_1 + x_2 - 2x_3 \leq 0 \\
& x_1 + x_2 + x_3 \geq 7000 \\
& x_1, x_2, x_3 \geq 0.
\end{array} \tag{1}$$

b) Vi erstatter målfunksjonen med den negative versjonen for å få et maksimeringsproblem og multipliserer behovsbeskrankningen med -1. Dette gir følgende problem på standardform

$$\begin{array}{rl}
-\text{maksimer} & Z = -35x_1 - 42x_2 - 49x_3 \\
\text{forutsatt at} & x_1 - x_2 \leq 0 \\
& 2x_1 + x_2 - 2x_3 \leq 0 \\
& -x_1 - x_2 - x_3 \leq -7000 \\
& x_1, x_2, x_3 \geq 0.
\end{array} \tag{2}$$

Vi har problemet på standardform og kan da sette opp det duale

$$\begin{array}{rl}
-\text{minimer} & W = -7000y_3 \\
\text{forutsatt at} & y_1 + 2y_2 - y_3 \geq -35 \\
& -y_1 + y_2 - y_3 \geq -42 \\
& -2y_2 - y_3 \geq -49 \\
& y_1, y_2, y_3 \geq 0.
\end{array} \tag{3}$$

Dette kan omformuleres til

$$
\begin{array}{rl}
\text{maksimer} & W = 7000y_3 \\
\text{forutsatt at} & -y_1 - 2y_2 + y_3 \leq 35 \\
& y_1 - y_2 + y_3 \leq 42 \\
& 2y_2 + y_3 \leq 49 \\
& y_1, y_2, y_3 \geq 0.
\end{array}
\tag{4}
$$

c) Optimal løsning leses direkte ut fra tabellen som $x_1 = 2000, x_2 = 2000$ og $x_3 = 3000$ med optimal verdi $Z = 301000$. Tilsvarende kan man lese ut den optimale duale løsningen fra den første raden i basislisten, $y_1 = 2, y_2 = 3$ and $y_3 = 43$.

d) Generelt er en vilkårlig basisliste på formen

$$
\begin{aligned}
Z &= c_B A_B^{-1} b + [c_N - c_B A_B^{-1} A_N] x_N \\
x_B &= A_B^{-1} b - A_B^{-1} A_N x_N
\end{aligned}
$$

Hvis minimumsbehovet endres vil dette kun påvirke høyresiden i behovs-beskrankningen. Vi beregner ny basisløsning som

Hvis minimumsbehovet endres vil dette kun påvirke høyresiden i behovs-beskrankningen. Vi beregner ny basisløsning som

$$
x_B^* = A_B^{-1} b = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -4 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -7000 + \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2000 - 2/7\delta \\ 2000 - 2/7\delta \\ 3000 - 3/7\delta \end{bmatrix}
$$

Vi setter $\delta = -3500$ og får

$$
x_B^* = \begin{bmatrix} 3000 \\ 3000 \\ 4500 \end{bmatrix}
$$

Siden denne vektoren er ikke-negativ og optimalitetsbetingelsen er uforandret, er dette en optimal løsning. Generelt har vi at den nye løsningen er ikke-negativ for $\delta \leq 7000$ og dermed optimal for alle behov større eller lik 0. Vi har da at $x_1 = x_2 = 2/3x_3$.

e) Vi beregner den nye basislisten med $c = [-42 \quad -42 \quad -49]$.

$$
c_B A_B^{-1} b = [-42 \quad -42 \quad -49] \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -4 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -7000 \end{bmatrix} = -315000
$$

$$
c_N - c_B A_B^{-1} A_N = -[-42 \quad -42 \quad -49] \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -4 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix} = [1 \quad -2 \quad -45]
$$

Dette gir følgende basisliste

$$
\begin{array}{l}
Z = -315000 + x_4 - 2x_5 - 45x_6 \\
\hline
x_1 = 2000 - \frac{3}{7}x_4 - \frac{1}{7}x_5 + \frac{2}{7}x_6 \\
x_2 = 2000 + \frac{4}{7}x_4 - \frac{1}{7}x_5 + \frac{2}{7}x_6 \\
x_3 = 3000 - \frac{1}{7}x_4 + \frac{2}{7}x_5 + \frac{3}{7}x_6
\end{array}
$$

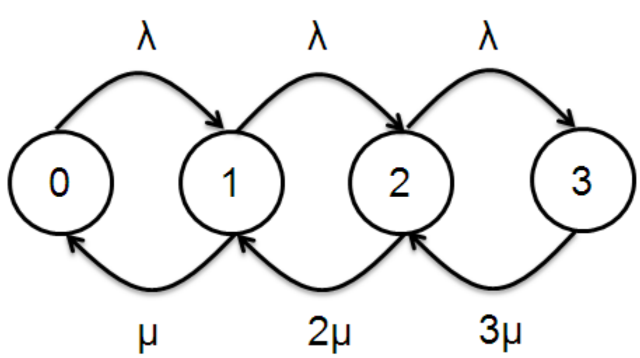
som ikke lenger er optimal. Vi gjør en pivotering med x_4 som inngående variabel og x_1 som utgående variabel

$$
\begin{array}{l}
Z = -310333 - \frac{7}{3}x_1 - \frac{7}{3}x_5 - \frac{133}{3}x_6 \\
\hline
x_4 = \frac{14000}{3} - \frac{7}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_5 + \frac{2}{3}x_6 \\
x_2 = \frac{14000}{3} - \frac{4}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_5 + \frac{2}{3}x_6 \\
x_3 = \frac{7000}{3} + \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_5 + \frac{1}{3}x_6
\end{array}
.
$$

Basislisten er optimal og vi har den optimale løsningen $x_1 = 0, x_2 = 14000/3$ og $x_3 = 7000/3$.

Oppgave 2

a) Vi betrakter drosjebilene som betjeningsstasjoner. Vi har tre betjeningsstasjoner. Når alle betjeningsstasjonene er i bruk (ingen ledige drosjebiler) vil kundene gå videre. Dette kan vi modellere som en M/M/3/3-kø, slik som skissert under.



Her er $\lambda=8$ og $\mu=2$.

b) Vi kjenner $P_n = C_n P_0$, der $C_n=(\lambda_{n-1}\lambda_{n-2}...\lambda_0)/(\mu_n\mu_{n-1}...\mu_1)$. Dette gir her:

$P_1 = \lambda/\mu * P_0$

$P_2 = \lambda^2/2\mu^2 * P_0$

$P_3 = \lambda^3/6\mu^3 * P_0$

og $P_0 = 1/(1 + \lambda/\mu + \lambda^2/2\mu^2 + \lambda^3/6\mu^3)$.

c) Her setter vi inn i formelen for P_0:

$P_0 = 1/(1+4 + 8 + 32/3) = 3/71$.

d) Forventet inntekt per kunde er 100 kr + 20 kr/min * 15 min = 400 kr. Antall potensielle kunder er 8 per time. Vi må så finne ut hvor mange av disse som ikke blir fraktet av Trondhjemstaxi. Andelen som ikke fraktes er lik andelen som ankommer når alle drosjebilene er opptatt, dvs. lik P_3.

$P_3 = 8^3/(6*2^3)\ P_0 = 32/3*3/71 = 32/71$.

Da blir forventet inntekt per time: 8*(1-32/71) kunder * 400 kr/kunde ≈ 1758 kr.

e) Vi kan bruke enten inverstransformasjonsmetoden eller akseptanse/avslag-metoden. Her viser vi sistnevnte:

La

$$g(x) = \begin{cases} 1/50 & hvis \quad 10 \le x \le 60 \\ 0 & ellers \end{cases}$$

og la c = 2. For å finne en tilfeldig observasjon fra f, kan vi gjøre som følger:

1) Trekk tilfeldig *r* uniformt fra [0, 1].
2) Trekk tilfeldig *x* fra fordelingen beskrevet med g som tetthetsfunksjon.
3) Hvis r ≤ f(x)/(c*g(x)), så er x vår observasjon. Ellers repeter fra steg 1.

(Dette kan beskrives enklere hvis man tenker grafisk: Vi trekker da X uniformt fra [10, 60] og U uniformt fra [0, 1/25] og aksepterer observasjonen hvis U<=f(X))

Oppgave 3

a) Vi får at $p_1 = 10 - 1/2*x_1$ og $p_2 = 40 - 2/3*x_2$.

Det gir:

$$\max Z = 10x_1 - \frac{1}{2}x_1^2 + 40x_2 - \frac{2}{3}x_2^2$$
$$2x_1 + x_2 \le 50$$
$$x_1 + x_2 \le 60$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

b) La oss formulere den avkortede Lagrangefunksjonen:

$$F(x,\lambda) = 10x_1 - \frac{1}{2}x_1^2 + 40x_2 - \frac{2}{3}x_2^2 - \lambda_1(2x_1 + x_2 - 50) - \lambda_2(x_1 + x_2 - 60)$$

KKT-betingelsene kan vi da skrive som:

$$\frac{\partial F}{\partial x_j} \le 0, \quad x_j \cdot \frac{\partial F}{\partial x_j} = 0, \quad x_j \ge 0, \quad \forall j$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda_i} \ge 0, \quad \lambda_i \cdot \frac{\partial F}{\partial \lambda_i} = 0, \quad \lambda_i \ge 0, \quad \forall i$$

Og her får vi:

$10 - x_1 - 2\lambda_1 - \lambda_2 \le 0,$ $\quad x_1(10 - x_1 - 2\lambda_1 - \lambda_2) = 0,$ $\quad x_1 \ge 0,$

$40 - \frac{4}{3}x_2 - \lambda_1 - \lambda_2 \le 0,$ $\quad x_2(40 - \frac{4}{3}x_2 - \lambda_1 - \lambda_2) = 0,$ $\quad x_2 \ge 0,$

$50 - 2x_1 - x_2 \ge 0,$ $\quad \lambda_1(50 - 2x_1 - x_2) = 0,$ $\quad \lambda_1 \ge 0,$

$60 - x_1 - x_2 \ge 0,$ $\quad \lambda_2(60 - x_1 - x_2) = 0,$ $\quad \lambda_2 \ge 0.$

c) For at alle løsninger som tilfredsstiller KKT-betingelsene skal være optimale løsninger, må problemet være konvekst. For maksimeringsproblemer betyr dette at mulighetsområdet må være en konveks mengde og at målfunksjonen må være konkav. Når alle restriksjonene er lineære vil mulighetsområdet være konvekst. Målfunksjonen er her en sum av fire ledd, og hvert ledd er en konkav funksjon. Derfor er også hele målfunksjonen konkav. I dette tilfellet vil altså en løsning som tilfredsstiller KKT-betingelsene svare til et globalt optimum.

d) For å løse problemet med modifisert simplex må vi bearbeide restriksjonene noe. La oss først se på:

$10 - x_1 - 2\lambda_1 - \lambda_2 \le 0$ og $x_1(10 - x_1 - 2\lambda_1 - \lambda_2) = 0.$

Vi kan skrive disse som

$-x_1 - 2\lambda_1 - \lambda_2 + v_1 = -10$ og $v_1 \ge 0,$ $\quad x_1 v_1 = 0.$

La oss så se på

$40 - \frac{4}{3}x_2 - \lambda_1 - \lambda_2 \le 0$ og $x_2(40 - \frac{4}{3}x_2 - \lambda_1 - \lambda_2) = 0.$

Disse kan vi skrive som

$-\frac{4}{3}x_2 - \lambda_1 - \lambda_2 + v_2 = -40$ og $v_2 \ge 0,$ $\quad x_2 v_2 = 0.$

Neste gruppe med restriksjoner:

$50 - 2x_1 - x_2 \ge 0,$ $\quad \lambda_1(50 - 2x_1 - x_2) = 0.$

Disse blir til:

$2x_1 + x_2 + y_1 = 50$ og $y_1 \ge 0,$ $\quad \lambda_1 y_1 = 0.$

Tilsvarende blir den siste gruppen av restriksjoner til:

$x_1 + x_2 + y_2 = 60$ og $y_2 \ge 0,$ $\quad \lambda_2 y_2 = 0.$

To av restriksjonene må nå multipliseres med -1 for å få positiv høyreside, og så må vi legge til kunstvariabler for å få en mulig startbasis. Etter å ha gjort dette får vi:

$$\min Z = a_1 + a_2$$

når $x_1 + 2\lambda_1 + \lambda_2 - v_1 + a_1 = 10$

$\frac{4}{3}x_2 + \lambda_1 + \lambda_2 - v_2 + a_2 = 40$

$2x_1 + x_2 + y_1 = 50$

$x_1 + x_2 + y_2 = 60$

$x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2, y_1, y_2 \geq 0$

samt komplementaritetskravet som må håndteres i den modifiserte simplex-algoritmen:

$x_1v_1 + x_2v_2 + \lambda_1y_1 + \lambda_2y_2 = 0$

Vi ble ikke bedt om å regne på dette i eksamensoppgaven, men la oss likevel ta med beregningene. Start-tablået blir som følger:

BV	Z	x_1	x_2	λ_1	λ_2	v_1	v_2	y_1	y_2	a_1	a_2	RHS
-Z	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0
a_1	0	1	0	2	1	-1	0	0	0	1	0	10
a_2	0	0	4/3	1	1	0	-1	0	0	0	1	40
y_1	0	2	1	0	0	0	0	1	0	0	0	50
y_2	0	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	60

Vi må eliminere a_1 og a_2 fra målfunksjonslinjen, fordi de er i basis, og får:

BV	Z	x_1	**x_2**	λ_1	λ_2	v_1	v_2	y_1	y_2	a_1	a_2	RHS
-Z	-1	-1	**-4/3**	-3	-2	1	1	0	0	0	0	-50
a_1	0	1	**0**	2	1	-1	0	0	0	1	0	10
a_2	**0**	**0**	**4/3**	**1**	**1**	**0**	**-1**	**0**	**0**	**0**	**1**	**40**
y_1	0	2	**1**	0	0	0	0	1	0	0	0	50
y_2	0	1	**1**	0	0	0	0	0	1	0	0	60

Her tar vi x_2 inn i basis. Da ser vi at a_2 vil gå ut:

BV	Z	**x_1**	x_2	λ_1	λ_2	v_1	v_2	y_1	y_2	a_1	a_2	RHS
-Z	-1	**-1**	0	-2	-1	1	0	0	0	0	1	-10
a_1	**0**	**1**	**0**	**2**	**1**	**-1**	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**	**10**
x_2	0	**0**	1	3/4	3/4	0	-3/4	0	0	0	3/4	30
y_1	0	**2**	0	-3/4	-3/4	0	3/4	1	0	0	-3/4	20
y_2	0	**1**	0	-3/4	-3/4	0	3/4	0	1	0	-3/4	30

I neste iterasjon er det x_1 som går inn i basis, og a_1 som går ut:

BV	Z	x_1	x_2	λ_1	λ_2	v_1	v_2	y_1	y_2	a_1	a_2	RHS
-Z	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0
x_1	0	1	0	2	1	-1	0	0	0	1	0	10
x_2	0	0	1	3/4	3/4	0	-3/4	0	0	0	3/4	30
y_1	0	0	0	-19/4	-11/4	2	3/4	1	0	-2	-3/4	0
y_2	0	0	0	-11/4	-7/4	1	3/4	0	1	-1	-3/4	20

Slik at vi får optimal løsning: $x_1 = 10$, $x_2 = 30$, og en salgsinntekt på 10*10 – 0.5*10*10 + 40*30 – 2/3*30*30 = 100 – 50 + 1200 – 600 = 650.