

NTNU  
Institutt for industriell økonomi og teknologiledelse  
Faggruppe for bedriftsøkonomi og optimering

Faglig kontakt under eksamen:  
Navn: Lars Magnus Hvattum  
Oppgave settet laget av:  
Navn: Bjørn Nygreen

## Svar til

### EKSAMEN I EMNE TIØ4120 OPERASJONSANALYSE, GK

Onsdag 10. august 2011

Tid: kl. 0900-1300

### Bokmål

Tillatte hjelpemidler: C - Godkjent kalkulator og K.Rottmann: "Matematisk formelsamling" er tillatt.

### Oppgave 1

a) Definerer:

$z$  = overskudd i neste periode regnet i 1000 kroner

$x_j$  = antall enheter produsert av type  $j$  i neste periode,  $j = 1, 2, 3$

Da får vi følgende formulering:

$$\max z = 4x_1 + 3x_2 + 6x_3$$

når

$$2x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 40$$

$$2x_1 + 2x_2 + x_3 = 30$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

b) Vi innfører følgende nye variable:

$x_4$  = tomgang i restriksjon 1

$x_5$  = kunstvariabel i restriksjon 2

Restriksjonene kan nå skrives slik:

$$2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 40$$

$$2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_5 = 30$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

Oppgaveteksten sier at vi skal bruke 2 fasers simpleks. Det vil si at vi skal minimere summen av de kunstvariable i fase 1 og forsette fra den løsningen med å maksimere overskuddet.

Målfunksjoner :

$$\text{Fase 1: } \min w = x_5$$

$$\text{Fase 2: } \max z = 4x_1 + 3x_2 + 6x_3$$

Vi har valget mellom å eliminere de basisvariable fra målfunksjonen før problemet settes inn i regneskjemaet eller å starte med de virkelige målfunksjonene i skjemaet og bruke en ekstra "iterasjon" til å fjerne de basisvariable fra målfunksjonen. Vi velger den siste måten og kaller de første skjemaene i hver fase for Iterasjon -1.

Siden læreboka bare maksimerer og betrakter "målvariabelen" som en basisvariabel omskriver vi målfunksjonene slik før vi starter med skjemaene:

$$\text{Fase 1: } -w + x_2 = 0$$

$$\text{Fase 2: } z - 4x_1 - 3x_2 - 6x_3 = 0$$

Fase 1, iterasjon -1:

Basis	w	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	RHS	Forhold
-w	-1	0	0	0	0	1	0	-
$x_4$	0	2	1	3	1	0	40	-
$x_5$	0	2	2	1	0	1	30	-

Her subtraherer vi siste linje fra målfunksjonen for å fjerne den basisvariable fra målfunksjonen. Vi får intet basisskift i denne "iterasjonen".

Fase 1, iterasjon 0:

Basis	w	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	RHS	Forhold
-w	-1	-2 *	-2	-1	0	0	-30	-
$x_4$	0	2	1	3	1	0	40	40/2 = 20
$x_5$	0	2	2	1	0	1	30	30/2 = 15 *

Vi skal velge den mest negative reduserte kostnaden. Det vanlig er å søke forfra og bare bytte til noe bedre (ikke bytte til noe like godt). Vi får derfor at  $x_1$  skal inn i basis.. Vi markerer den valgte reduserte kostnaden med en \*. Vi beregner forholdene og markerer det minste med stjerne.

Vi ser at  $x_5$  skal ut av basis. Oppdateringene av skjemaet gjøres først i neste iterasjon:

Fase 1, iterasjon 1:

Basis	$w$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	RHS	Forhold
$-w$	-1	0	0	0	0	1	0	-
$x_4$	0	0	-1	2	1	-1	10	-
$x_5$	0	1	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	15	-

Vi ser her at det ikke er flere negative reduserte kostnader og heller ingen kunstvariable i basis. Vi har derfor funnet optimal løsning i fase 1 og denne løsningen har en mulig basis.

Vi avslutter derfor fase 1 og starter fase 2. Det gjør vi ved å sette inn målfunksjon  $z$  i stedet for målfunksjon  $-w$  i skjemaet foran.

Fase 2, iterasjon -1:

Basis	$z$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	RHS	Forhold
$z$	1	-4	-3	-6	0	0	0	-
$x_4$	0	0	-1	2	1	-1	10	-
$x_1$	0	1	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	15	-

Vi kunne slettet kolonnen for  $x_5$  siden den kunstvariable ikke skal inn i basis igjen, men vi beholder den slik at vi har de dualvariable (muligens med motsatt fortegn) og den inverse basismatrisene i spaltene til  $x_4$  og  $x_5$ . Her adderer vi siste linje multiplisert med 4 til målfunksjonen for å fjerne alle basisvariable fra målfunksjonen.

Fase 2, iterasjon 0:

Basis	$z$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	RHS	Forhold
$z$	1	0	1	-4 *	0	2	60	-
$x_4$	0	0	-1	2	1	-1	10	$10/2 = 5 *$
$x_1$	0	1	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	15	$15/\frac{1}{2} = 30$

Vi ser her at  $x_3$  skal inn og  $x_4$  ut av basis. Oppdateringen skjer først i neste iterasjon

Fase 2, iterasjon 1:

Basis	$z$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	RHS	Forhold
$z$	1	0	$-1 *$	0	2	0	80	–
$x_3$	0	0	$-\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	5	–
$x_1$	0	1	$\frac{5}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{25}{2}$	$\frac{25}{2} / \frac{5}{4} = 10 *$

Her ser vi at  $x_2$  skal inn og  $x_1$  ut av basis. Oppdatering av skjema først i neste iterasjon

Fase 2, iterasjon 2:

Basis	$z$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	RHS	Forhold
$z$	1	$\frac{4}{5}$	0	0	$\frac{9}{5}$	$\frac{3}{5}$	90	–
$x_3$	0	$\frac{2}{5}$	0	1	$\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	10	–
$x_2$	0	$\frac{4}{5}$	1	0	$-\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	10	–

Her er det ingen negative reduserte kostnader og vi har den optimale løsningen.

$$z = 90, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 10, \quad x_3 = 10$$

hvor  $z$  er målt i 1000 kroner.

c) Dualen formuleres slik:

$$\min \quad w = 40y_1 + 30y_2$$

$$2y_1 + 2y_2 \geq 4$$

$$y_1 + 2y_2 \geq 3$$

$$3y_1 + y_2 \geq 6$$

$$y_1 \geq 0$$

$$y_2 \rightarrow \text{uten tegn krav}$$

$y_i$  er skyggepris på høyresiden i restriksjon  $i$  = endring i  $z$  pr enhets endring i  $b_i$

d) Løsnings verdiene til i dualen finnes i  $z$  linjen under  $x_4$  og  $x_5$  i det optimale skjemaet og målverdien er den samme som i primalen

$$w = 90, \quad y_1 = \frac{9}{5}, \quad y_2 = \frac{3}{5}$$

Benevnningen på  $w$  og  $y_i$ -ene er 1000 kroner.

e) Den lavest nummererte produkttypen som ikke produseres er nummer 1

Fra starten av iterasjon -1 i fase 2 har en ikke multiplisert  $z$  linjen med noe tall, en har bare addert andre linjer multiplisert med konstanter.

Dvs. at slutt verdiene i  $z$  er de negative målkoeffisientene ( $-c_j$ ) pluss totaleffekten av alle adderingene ( $z_j$ ).

For  $x_1$  får vi:

$$z_j - c_j = z_j - 4 = \frac{4}{5} \Rightarrow z_j = \frac{24}{5}$$

For at løsningen ikke skal endres må vi ikke ønske  $x_1$  inn i basis. Vi må derfor ha:

$$z_j - c_j^{ny} \geq 0 \Rightarrow c_j^{ny} \leq z_j = \frac{24}{5} = 4.8 \quad (\text{målt i 1000 kroner})$$

f) Når høyresiden i et LP problem varieres forblir verdiene på de dualvariable uendret så lenge basis ikke må endres, dvs. så lenge de basisvariable ikke blir negative.

Når energitilgjengeligheten endres i dette problemet, kan vi uttrykke den nye høyresiden slik:

$$b(\theta) = \begin{bmatrix} 40 \\ 30 \end{bmatrix} + \theta \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

hvor  $\theta$  = endringen (positiv eller negativ) i energitilgangen.

Generelt kan verdien på de basisvariable skrives slik:

$$x_B = A_B^{-1}b \geq 0$$

Den inverse basismatrisen finnes i restriksjonslinjene under  $x_4$  og  $x_5$  i sluttskjemaet.

Her gir dette:

$$x_B = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix} b(\theta) = \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \end{bmatrix} + \theta \begin{bmatrix} \frac{2}{5} \\ -\frac{1}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 + \frac{2\theta}{5} \\ 10 - \frac{\theta}{5} \end{bmatrix} \geq 0$$

Dette gir

$$10 - \frac{\theta}{5} \geq 0 \Rightarrow \theta \leq 50$$

$$10 + \frac{2\theta}{5} \geq 0 \Rightarrow \theta \geq -25$$

Dualløsningen ikke endres ikke for energitilgangsendringer,  $\theta$ , i følgende intervall:

$$-25 \leq \theta \leq 50$$

## Oppgave 2

a) Produksjonen skal flyttes i begynnelsen av 5 år fra nå.. Vi skal ta beslutning om skifing eller ikke skifing i begynnelsen av hvert av de 4 årene før flyttingen

$n$  = trinn = begynnelsen av hvert av de resterende 4 driftsårene

$x_n$  = beslutningsvariabel = behold (0) eller skift (1) utstyr

$y_n$  = tilstandsvariabel = alder på utstyret på beslutningstidspunkt  $n$

b)

$$N = \text{mengden av trinn} = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$X_n = \text{mengden av mulige beslutninger på trinn } n = \{0, 1\}, \quad \forall n$$

$$\rightarrow = 0 \text{ for behold, } = 1 \text{ for bytt}$$

Verdien av tilstanden varierer med beslutningstrinn slik:

$$y_{n+1}(x_n, y_n) = 1 \cdot x_n + (y_n + 1) \cdot (1 - x_n)$$

Dette gir følgende mulige verdier på de tilstandsvariable:

$$Y_1 = \{3\}$$

$$Y_2 = \{1, 4\}$$

$$Y_3 = \{1, 2, 5\}$$

$$Y_4 = \{1, 2, 3, 6\}$$

c) Vi regner baklengs rekursjon, på samme måte som i læreboka og definerer:

$f_n^*(y_n)$  = maksimalt netto overskudd f.o.m. trinn  $n$ , t.o.m. trinn 4 og salg av utstyr etter år 4,  
 → gitt at utstyret er  $y_n$  år på trinn  $n$ .

$f_n(y_n, x_n)$  = maksimalt netto overskudd f.o.m. trinn  $n$ , t.o.m. trinn 4 og salg av utstyr etter år 4.  
 → gitt at utstyret er  $y_n$  år på trinn  $n$  og en tar beslutningen  $x_n$  på trinn  $n$ .

Hvis vi bruker de samme symbolene på i økonomiske data som i oppgave teksten, men skrevet som funksjoner av  $y_n$  får vi:

For det siste driftsåret,  $n = 4$ :

$$f_4(y_4, x_4) = [R(0) + S(y_n) - I + S(1)] \cdot x_4 + [R(y_n) + S(y_n + 1)] \cdot (1 - x_4)$$

$$f_4^*(y_4) = \max_{x_4 \in \{0,1\}} f_4(y_4, x_4)$$

For de øvrige 4 driftsårene,  $n = 1, 2, 3$

$$f_n(y_n, x_n) = [R(0) + S(y_n) - I + f_{n+1}^*(1)] \cdot x_n + [R(y_n) + f_{n+1}^*(y_n + 1)] \cdot (1 - x_n)$$

$$f_n^*(y_n) = \max_{x_n \in \{0,1\}} f_n(y_n, x_n)$$

Tilstanden på trinn 1 (år 1) er kjent,  $y_1 = 3$ , så optimal målverdi,  $z$ , blir:

$$z = f_1^*(3)$$

Vi regner baklengs og starter med trinn  $n = 4$  :

Tilstand	Bytt ( $x_4 = 1$ )	Behold ( $x_4 = 0$ )	$f_4^*(y_4)$	$x_4^*(y_4)$
Formel	$[R(0) + S(y_3) - I + S(1)]$	$[R(y_3) + S(y_3 + 1)]$		
1	$196 + 800 - 1000 + 800 = 796$	$184 + 600 = 784$	796	1
2	$196 + 600 - 1000 + 800 = 596$	$173 + 500 = 673$	673	0
3	$196 + 500 - 1000 + 800 = 496$	$157 + 300 = 457$	496	1
6	$196 + 50 - 1000 + 800 = 46$	Må bytte	46	1

Så fortsetter vi med trinn  $n = 3$  :

Tilstand	Bytt ( $x_3 = 1$ )	Behold ( $x_3 = 0$ )	$f_3^*(y_3)$	$x_3^*(y_3)$
Formel	$[R(0) + S(y_3) - I + f_4^*(1)]$	$[R(y_3) + f_4^*(y_3 + 1)]$		
1	$196 + 800 - 1000 + 796 = 792$	$184 + 673 = 857$	857	0
2	$196 + 600 - 1000 + 796 = 592$	$173 + 496 = 669$	669	0
5	$196 + 100 - 1000 + 796 = 92$	$122 + 46 = 168$	168	0

Så fortsetter vi med trinn  $n = 2$  :

Tilstand	Bytt ( $x_2 = 1$ )	Behold ( $x_2 = 0$ )	$f_2^*(y_2)$	$x_2^*(y_2)$
Formel	$[R(0) + S(y_2) - I + f_3^*(1)]$	$[R(y_2) + f_3^*(y_2 + 1)]$		
1	$196 + 800 - 1000 + 857 = 853$	$184 + 669 = 853$	853	1/0
4	$196 + 300 - 1000 + 857 = 353$	$138 + 168 = 306$	353	1

Så fortsetter vi med trinn  $n = 1$  :

Tilstand	Bytt ( $x_1 = 1$ )	Behold ( $x_1 = 0$ )	$f_1^*(y_1)$	$x_1^*(y_1)$
Formel	$[R(0) + S(y_1) - I + f_2^*(1)]$	$[R(y_1) + f_2^*(y_1 + 1)]$		
3	$196 + 500 - 1000 + 853 = 549$	$157 + 353 = 510$	549	1

Så nøster vi opp løsningen:

$$\begin{aligned}
 y_1 = 3 & \Rightarrow x_1 = 1 \Rightarrow y_2 = 1 \\
 y_2 = 1 & \Rightarrow x_2 = 1 \Rightarrow y_3 = 1 \\
 y_3 = 1 & \Rightarrow x_3 = 0 \Rightarrow y_4 = 2 \\
 y_4 = 2 & \Rightarrow x_4 = 0 \Rightarrow y_5 = 3
 \end{aligned}$$

eller

$$\begin{aligned}
 y_1 = 3 & \Rightarrow x_1 = 1 \Rightarrow y_2 = 1 \\
 y_2 = 1 & \Rightarrow x_2 = 0 \Rightarrow y_3 = 2 \\
 y_3 = 2 & \Rightarrow x_3 = 0 \Rightarrow y_4 = 3 \\
 y_4 = 3 & \Rightarrow x_4 = 1 \Rightarrow y_5 = 1
 \end{aligned}$$

Begge løsningen har et netto oveskudd på  $z = 549000$  kroner.



**Oppgave 3**

a) Vi får enklest regning hvis vi definerer operatørens igangsetting av maskinene som betjening og systemet som opertøren og den eventuelle maskinen som blir betjent pluss de maskinene som eventuelt står stille og venter på betjening.

b) Diagrammet vil bestå av 5 noder på en linje som hver representerer en av de mulige tilstandene (antall kunder i systemet): 0, 1, 2, 3, 4.

De mulige overgangene representeres med buer med pil mellom nabo noder. Diagrammet tegnes ikke her.

$\lambda_n =$  overgangsrate pr time fra tilstand  $n$  til tilstand  $n + 1$

$\mu_n =$  overgangsrate pr time fra tilstand  $n$  til tilstand  $n - 1$

$$\lambda_n = (4 - n)\lambda, \quad \lambda = 1, \quad n = 0, 1, 2, 3$$

$$\mu_n = \mu, \quad \mu = 4, \quad n = 1, 2, 3, 4$$

c) Vi beregner Sannsynligheten,  $p_0$ , for tomt system og multipliserer den med 40 timer.

Sannsynlighetene for  $n$  kunder i systemet beregnes som i læreboka ved bruk av hjelpestørrrelsene:

$$C_n = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ \frac{\lambda_0 \cdot \lambda_{n-1}}{\mu_1 \cdot \mu_n} & n = 1, 2, 3, 4 \end{cases}$$

$$p_n = C_n \left[ \sum_{k=0}^4 C_k \right]^{-1}$$

$$\left[ \sum_{k=0}^4 C_k \right] = 1 + 4 \cdot \left(\frac{1}{4}\right) + 4 \cdot 3 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 + 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3 + 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^4 = \frac{103}{32}$$

$$\text{Tid uten betjening} = 40p_0 = 40C_0 \left[ \sum_{k=0}^4 C_k \right]^{-1} = \frac{40 \cdot 32}{103} = \frac{1280}{103} = 12 \text{ timer og } 26 \text{ minutter}$$

d) For hver betjening vil en maskin produsere 1 enhet. For hver time operatøren bruker på betjening, vil han i gjennomsnitt betjene 4 maskiner.

Dvs.

$$\text{Forventet produksjon} = 4 \cdot \frac{40 \cdot 103 - 1280}{103} = 110.3$$

Alternativt kan en regne slik:

$$\text{Forventet produksjon} = 40 \cdot \sum_{n=1}^4 \mu_n p_n = 40 \cdot \mu \sum_{n=1}^4 p_n = 160 \sum_{n=1}^4 p_n = 160 \cdot (1 - p_0)$$

Tallsvaret blir det samme.