

NORGES TEKNISK-NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
INSTITUTT FOR INDUSTRIELL ØKONOMI OG TEKNOLOGILEDELSE

Faglig kontakt under eksamen:**Navn: Lars Magnus Hvattum****Tlf.: 45 22 51 41****KONTINUASJONSEKSAMEN I TIØ4120
OPERASJONSANALYSE, GK**

Mandag 6. august 2012

Tid: kl. 0900 – 1300

(Bokmål)

Tillatte hjelpemidler: C - Godkjent kalkulator og K.Rottmann: ”Matematisk formelsamling”.

Sensurfrist: 27. august, 2012

Oppgave 1

En lakseoppdretter må planlegge innkjøp av fôr til neste måneds drift. Det er behov for totalt 10 tonn fôr. Budsjettkrav gjør at det maksimalt kan brukes 75 000 kr til innkjøpet. Det er viktig at andelen marine fiskeoljer i fôrblendingen overstiger 1 %. Fôret kan kjøpes av tre leverandører som har ulik pris og kvalitet på fôret. Tabellen under angir pris og innhold av protein og fiskeoljer for hver leverandør.

Leverandør	Proteininnhold (%)	Fiskeolje (%)	Pris (kr per kg)
1	40	0.8	7
2	50	1.1	8
3	50	1.8	9

- a) Gitt at oppdretteren ønsker å få en fôrblending med høyest mulig proteininnhold, vis at problemet med å bestemme mengden som skal kjøpes inn fra hver leverandør, kan løses ved følgende lineære optimeringsproblem:

$$\begin{aligned} \text{maksimer } & Z = 0.4x_1 + 0.5x_2 + 0.5x_3 \\ \text{forutsatt at } & x_1 + x_2 + x_3 = 10000 \\ & 7x_1 + 8x_2 + 9x_3 \leq 75000 \\ & -2x_1 + x_2 + 8x_3 \geq 0 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{aligned} \tag{1}$$

b) Vis at problem (1) kan skrives på standardform som:

$$\begin{aligned}
 \text{maksimer } Z &= 0.4x_1 + 0.5x_2 + 0.5x_3 \\
 \text{forutsatt at } x_1 + x_2 + x_3 &\leq 10000 \\
 -x_1 - x_2 - x_3 &\leq -10000 \\
 7x_1 + 8x_2 + 9x_3 &\leq 75000 \\
 2x_1 - x_2 - 8x_3 &\leq 0 \\
 x_1, x_2, x_3 &\geq 0,
 \end{aligned} \tag{2}$$

og bruk dette til og finne det duale problemet til (1).

Med utgangspunkt i problemet på standardform kan man løse problemet ved hjelp av simpleksmetoden og få følgende optimale basisliste:

$$\begin{aligned}
 Z &= 4375 - 0.875x_5 - 0.175x_6 - 0.025x_7 \\
 x_1 &= 6250 + 13.75x_5 + 1.75x_6 + 0.25x_7 \\
 x_2 &= 2500 - 18.5x_5 - 2.5x_6 - 0.5x_7 \\
 x_3 &= 1250 + 5.75x_5 + 0.75x_6 + 0.25x_7 \\
 x_4 &= 0 - x_5
 \end{aligned}$$

hvor x_4, x_5, x_6 og x_7 er slakkvariabler i beskrankningene. Alternativt kan det skrives på tabellform som

Basis	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	h.s.
Z	1	0	0	0	0	0.875	0.175	0.025	4375
x_1	0	1	0	0	0	-13.75	-1.75	-0.25	6250
x_2	0	0	1	0	0	18.5	2.5	0.5	2500
x_3	0	0	0	1	0	-5.75	-0.75	-0.25	1250
x_4	0	0	0	0	1	1	0	0	0

- c) Bruk denne informasjonen til å finne den maksimale proteinandelen og den tilhørende optimale løsningen av problem (1) samt den optimale løsningen til det duale problemet.
- d) Oppdretteren vurderer å øke budsjettet til innkjøp av fôr. Han har beregnet at inntektene øker med 500 kr for hver prosent økning i proteinandel. Med utgangspunkt i den optimale løsningen over, bør han øke budsjettet til innkjøp av fôr?
- e) Leverandør 3 har endret sammensetningen av fôret sitt og har økt proteinandelen til 60 %. Finn på enklest mulig måte den nye optimale løsningen.

Oppgave 2

Hotell Singsaker står foran en betydelig omgjøring av sine fasiliteter, og må beslutte hvilken kombinasjon av tilgjengelige rom og priser som skal benyttes fremover. For tiden har hotellet 450 rom og kan vise til følgende romutnyttelse:

Romtype	Pris per døgn	Benyttede rom per dag	Inntekt
Standard	850	250	212500
Gull	980	100	98000
Platina	1390	50	69500

Hvert markedssegment har sin egen priselastisitet. Estimaten er:

Romtype	Priselastisitet
Standard	-1.5
Gull	-2.0
Platina	-1.0

Dette betyr, for eksempel at en 1 % *reduksjon* i prisen på et standardrom medfører en 1.5 % *økning* i antall rom benyttet per dag. Generelt vil antall benyttede rom per dag kunne uttrykkes ved følgende formel:

$$x^{ny} = x^{gammel} * (1 + e * (p^{ny} - p^{gammel})/p^{gammel})$$

der x^{ny} og x^{gammel} er henholdsvis nytt antall benyttede rom og tidligere antall benyttede rom, e er priselastisiteten og p^{ny} og p^{gammel} er henholdsvis ny pris og gammel pris.

Eierne av Hotell Singsaker har bestemt at pris per døgn for romtype Standard, Gull og Platina ikke kan være mindre enn henholdsvis 700, 900 og 1200. De ønsker så å finne priser som maksimerer den samlede inntekten. De har ikke mulighet til å la totalt antall rom avvike fra dagens 450, men kan pusse opp og endre standarden til alle rommene.

Anta at det er akseptabelt at snitt antall benyttede rom per dag av en gitt type tar fraksjonelle verdier (det kan bety at de for eksempel noen dager må la en Standard-gjest få overnatte på et Gull-rom).

- Sett opp en ikke-lineær optimeringsmodell som maksimerer inntekten til Hotell Singsaker. Bruk som beslutningsvariabler den nye prisen for hver romtype.
- Sett opp KKT-betingelsene for problemet formulert i a).
- Under hvilke kriterier gir en løsning av KKT-betingelsene garantert den optimale løsningen til et problem? Vurder om dette er tilfelle her.

- d) Etter en del knotting har assistenten din funnet ut at det bare er to bindende restriksjoner for problemet: minsteprisen på Gull-rom og totalt antall tilgjengelige rom. Bruk denne informasjonen til å løse problemet ved hjelp av Lagrangemultiplikatormetoden.
- e) Estimer hvor mye Hotell Singsaker ville fått i ekstra inntekt hvis de øker antall rom tilgjengelig med 20. Er estimatet ditt et overestimat eller et underestimat? Begrunn svaret.

Oppgave 3

Meningsmålingsinstituttet AS driver utstrakt bruk av telefonundersøkelser, og har en egen avdeling med ansatte som ringer opp tilfeldige husholdninger i dette øyemed. Tre av de ansatte (Kim, Andrea og Robin) er cocacolikere, og tar ustanselig pause i arbeidet for å kjøpe seg en flaske brusvann fra brusautomaten.

Arbeidsgiveren synes i utgangspunktet dette er greit, for det er beregnet at det i snitt bare tar to minutter å gå fra arbeidspulten, kjøpe seg en flaske, og så returnere til pulten igjen. Arbeidsgiveren er villig til å ignorere dette, selv om hver av de tre ansatte gjerne drikker i snitt 4 flasker i løpet av en 8-timers arbeidsdag.

I det siste har dog Kim, Andrea og Robin blitt bedre kjent med hverandre, og når de møtes ved brusautomaten kommer de ofte i snakk. Arbeidsgiver har observert dette og funnet ut at når to av dem møtes snakker de gjennomsnittlig sammen i 10 minutter (som kommer i tillegg til tiden de bruker på å betjene brusautomaten). Hvis alle tre skulle havne ved brusautomaten samtidig tar det i gjennomsnitt 22 minutter før alle er tilbake til arbeidspultene sine.

Arbeidsgiveren ønsker å vurdere ulike tiltak for å få bukt med problemet, men ønsker først å vite hvor mye arbeidstid som går tapt på grunn av brusautomaten.

- a) Du vurderer å analysere problemet ved å sette opp en egnet kømodell. Hvilke antakelser må du gjøre ut over det som oppgis i oppgaveteksten over for å kunne sette opp en fødsels- og dødsprosess som kan brukes til å regne ut hvor mye arbeidstid som går tapt?

Du velger i stedet å satse på simulering for å beregne den tapte arbeidstiden. Her forutsetter du at tiden mellom bruskjøp er eksponensialfordelt, at tiden det tar å betjene brusautomaten er konstant, og at tiden som eventuelt går med på snakk er triangulærfordelt.

- b) Skisser hvordan du ville designet en simulering i Excel for å regne ut hvor mye av arbeidsdagen som går bort på grunn av arbeidstakernes avhengighet. Bruk diskret hendelsessimulering (*discrete event simulation*) med hendelsesbaserte tidsinkrement (*next-event incrementing*).
- c) Forklar hva som er de mulige tilstandene i simuleringen og hva som er de mulige hendelsene.

Tiden mellom bruskjøp for hver av de tre ansatte kan modelleres som en eksponensialfordelt variabel med kumulativ sannsynlighetsfordeling

$$F(x) = 1 - e^{-ax}, x \geq 0.$$

- d) Forklar hvordan du vil generere observasjoner fra denne fordelingen ved hjelp av en metode fra pensum.