LØSNINGSFORSLAG KONTINUASJONSEKSAMEN VÅR 2012 I TIØ4120 OPERASJONSANALYSE, GRUNNKURS

Oppgave 1

a) Vi lar x_1, x_2 og x_3 være antall kg for kjøpt inn fra leverandør 1, 2 og 3. Behovet på 10000 kg må dekkes og kan modelleres ved beskrankningen $x_1 + x_2 + x_3 = 10000$. Totale innkjøpskostnader kan ikke overstige 75000 kr, $7x_1 + 8x_2 + 9x_3 \leq 75000$. Det gjenstår dermed å sørge for at vi overholder kravet til innhold av fiskeolje. Hvis vi ser på den totale ojemengden i det innkjøpte foret så er den lik $0.008x_1 + 0.011x_2 + 0.018x_3$. Dette må overstige 1 % av den totale vekten, dvs. $0.01(x_1 + x_2 + x_3)$. Vi får dermed at

$$0.8x_1 + 1.1x_2 + 1.8x_3 \geq x_1 + x_2 + x_3$$

som kan forenkles til

$$-2x_1 + x_2 + 8x_3 \geq 0.$$

Målfunksjonen er andelen protein i forblandingen. Dette er lik

$$\frac{0.4x_1 + 0.5x_2 + 0.5x_3}{x_1 + x_2 + x_3}.$$

Siden uttrykket under brøkstreken er konstant, behøver vi kun å betrakte uttrykket over brøkstreken. Til sammen med ikke-negative verdier for variablene gir dette følgende lineære optimeringsproblem

$$\begin{array}{rl} \text{maksimer} & Z = 0.4x_1 + 0.5x_2 + 0.5x_3 \\ \text{forutsatt at} & x_1 + x_2 + x_3 = 10000 \\ & 7x_1 + 8x_2 + 9x_3 \leq 75000 \\ & -2x_1 + x_2 + 8x_3 \geq 0 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{array} \tag{1}$$

b) Vi erstatter likheten med to ulikheter og multipliserer den ene ulikheten med -1 for å få et $\leq$-uttrykk. Tilsvarende gjøres med den siste ulikheten. Dette gir følgende problem på standardform

$$\begin{array}{rl} \text{maksimer} & Z = 0.4x_1 + 0.5x_2 + 0.5x_3 \\ \text{forutsatt at} & x_1 + x_2 + x_3 \leq 10000 \\ & -x_1 - x_2 - x_3 \leq -10000 \\ & 7x_1 + 8x_2 + 9x_3 \leq 75000 \\ & 2x_1 - x_2 - 8x_3 \leq 0 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0, \end{array} \tag{2}$$

Vi har problemet på standardform og kan da sette opp det duale

$$\begin{array}{rl} \text{minimer} & W = 10000y_1 - 10000y_2 + 75000y_3 \\ \text{forutsatt at} & y_1 - y_2 + 7y_3 + 2y_4 \geq 0.4 \\ & y_1 - y_2 + 8y_3 - y_4 \geq 0.5 \\ & y_1 - y_2 + 9y_3 - 8y_4 \geq 0.5 \\ & y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0. \end{array} \tag{3}$$

Ved å innføre en fri variabel $u = y_1 - y_2$ kan dette omformuleres til

$$\begin{array}{rl} \text{maksimer} & W = 10000u + 75000y_3 \\ \text{forutsatt at} & u + 7y_3 + 2y_4 \geq 0.4 \\ & u + 8y_3 - y_4 \geq 0.5 \\ & u + 9y_3 - 8y_4 \geq 0.5 \\ & y_3, y_4 \geq 0. \end{array} \tag{4}$$

c) Optimal løsning leses direkte ut fra tabellen som $x_1 = 6250, x_2 = 2500$ og $x_3 = 1250$ med et maksimalt protein-innhold på 43.75 %. Tilsvarende kan man lese ut den optimale duale løsningen fra den første raden i basislisten, $y_1 = 0, y_2 = 0.875, y_3 = 0.175$ og $y_3 = 0.025$. Alternativt $u = -0.875, y_3 = 0.175$ og $y_3 = 0.025$.

d) Den duale variabelen y_3 uttrykker hvor mye kostnadsfunksjonen vil endres når man endrer høyresiden i budsjettbeskrankningen med en enhet (innenfor visse grenser). For hver krone ekstra man bruker vil man øke protein-innholdet med 0.00175 % noe som gir en merinntekt på $0.00175 * 500 = 0.875$ kr. Det vil derfor ikke være lønnsomt å øke budsjettet avsatt til forinnkjøp.

e) Generelt er en vilkårlig basisliste på formen

$$\begin{aligned} Z &= c_B A_B^{-1} b + [c_N - c_B A_B^{-1} A_N] x_N \\ x_B &= A_B^{-1} b - A_B^{-1} A_N x_N \end{aligned}$$

Vi beregner de reduserte kostnadene for den nye basislisten med

$$c = [0.4 \quad 0.5 \quad 0.6 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

og $B = \{1, 2, 3, 4\}$ og $N = \{5, 6, 7\}$. Dette gir

$$\begin{aligned} c_N - c_B A_B^{-1} A_N &= [0 \quad 0 \quad 0] - [0.4 \quad 0.5 \quad 0.6 \quad 0] \begin{bmatrix} -13.75 & -1.75 & -0.25 \\ 18.5 & 2.5 & 0.5 \\ -5.75 & -0.75 & -0.25 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= [-0.3 \quad -0.1 \quad 0] \end{aligned}$$

Siden de reduserte kostnadene er ikke-postive vil basislisten fortsatt være optimal og vi har at $x_1 = 6250, x_2 = 2500$ og $x_3 = 1250$ fortsatt er en optimal løsning.

Oppgave 2

a)

Vi lar x_s, x_g og x_p være nye priser for henholdsvis standard-, gull- og platinarom. Hvis vi midlertidig innfører y_s, y_g og y_p for antall rom benyttet per dag kan vi skrive:

$y_s = 250(1 – 1.5(x_s – 850)/850) = 250 – 375(x_s – 850)/850 = 625 – 375x_s/850$

$y_g = 100 – 200(x_g – 980)/980 = 300 – 200x_g/980$

$y_p = 50 – 50(x_p – 1390)/1390 = 100 – 50x_p/1390$

Målfunksjonen blir da:

$\max\ f(x_s, x_g, x_p) = y_s x_s + y_g x_g + y_p x_p$

$= 625x_s – (375/850)x_s^2 + 300x_g – (200/980)x_g^2 + 100x_p – (50/1390)x_p^2$

Med følgende restriksjoner:

$x_s \geq 700$

$x_g \geq 900$

$x_p \geq 1200$

$y_s + y_g + y_p \leq 450$, som uttrykt med beslutningsvariablene blir:

$1025 – (375/850)x_s – (200/980)x_g – (50/1390)x_p \leq 450$

Eventuelt, for kompletthet: $x_s, x_g, x_p \geq 0$

b)

Vi konverterer først til standard form:

$\max\ 625x_s – (375/850)x_s^2 + 300x_g – (200/980)x_g^2 + 100x_p – (50/1390)x_p^2$

s.t.

$–x_s \leq –700$

$–x_g \leq –900$

$–x_p \leq –1200$

$1025 – (375/850)x_s – (200/980)x_g – (50/1390)x_p \leq 450$

$x_s, x_g, x_p \geq 0$

Så kan vi sette opp den avkortede Lagrangefunksjonen:

$$F(x, \lambda) = 625x_s - (375/850)x_s^2 + 300x_g - (200/980)x_g^2 + 100x_p - (50/1390)x_p^2$$
$$- \lambda_s(-x_s + 700) - \lambda_g(-x_g + 900) - \lambda_p(-x_p + 1200)$$
$$- \lambda_t(1025 - (375/850)x_s - (200/980)x_g - (50/1390)x_p - 450)$$

KKT-betingelsene kan nå skrives generelt:

$$\frac{\partial F}{\partial x_j} \leq 0, \quad x_j \cdot \frac{\partial F}{\partial x_j} = 0, \quad x_j \geq 0, \quad \forall j$$
$$\frac{\partial F}{\partial \lambda_i} \geq 0, \quad \lambda_i \cdot \frac{\partial F}{\partial \lambda_i} = 0, \quad \lambda_i \geq 0, \quad \forall i$$

som for vårt problem blir:

$625 - (750/850)x_s + \lambda_s + (375/850)\lambda_t \leq 0$

$x_s(625 - (750/850)x_s + \lambda_s + (375/850)\lambda_t) = 0$

$x_s \geq 0$

$300 - (400/980)x_g + \lambda_g + (200/980)\lambda_t \leq 0$

$x_g(300 - (400/980)x_g + \lambda_g + (200/980)\lambda_t) = 0$

$x_g \geq 0$

$100 - (100/1390)x_p + \lambda_p + (50/1390)\lambda_t \leq 0$

$x_p(100 - (100/1390)x_p + \lambda_p + (50/1390)\lambda_t) = 0$

$x_p \geq 0$

$x_s - 700 \geq 0$

$\lambda_s(x_s - 700) = 0$

$\lambda_s \geq 0$

$x_g - 900 \geq 0$

$\lambda_g(x_g - 900) = 0$

$\lambda_g \geq 0$

$x_p - 1200 \geq 0$

$\lambda_p(x_p - 1200) = 0$

$\lambda_p \geq 0$

$-1025 + (375/850)x_s + (200/980)x_g + (50/1390)x_p + 450 \geq 0$

$\lambda_t(-1025 + (375/850)x_s + (200/980)x_g + (50/1390)x_p + 450) = 0$

$\lambda_t \geq 0$

c)

KKT-betingelsene gir optimal løsning dersom problemet er konvekst. For et maksimeringsproblem betyr det at målfunksjonen må være konkav: her er målfunksjonen en sum av konkave funksjoner, så derfor er også målfunksjonen konkav. I tillegg er alle restriksjonene lineære, slik at mulighetsområdet utgjør en konveks mengde. Sammen betyr dette at problemet er konvekst, og at en løsning av KKT-betingelsene gir optimal løsning.

d)

Med bare to bindende restriksjoner blir problemet vi skal løse som følger:

max $625x_s - (375/850)x_s^2 + 300x_g - (200/980)x_g^2 + 100x_p - (50/1390)x_p^2$

s.t.

$x_g = 900$

$1025 - (375/850)x_s - (200/980)x_g - (50/1390)x_p = 450$

Lagrangefunksjonen blir:

$$L(x, \lambda) = 625x_s - (375/850)x_s^2 + 300x_g - (200/980)x_g^2 + 100x_p - (50/1390)x_p^2$$
$$- \lambda_g(-x_g + 900) - \lambda_t(1025 - (375/850)x_s - (200/980)x_g - (50/1390)x_p - 450)$$

Stasjonære punkter for Lagrangefunksjonen gir mulige løsninger til problemet, så vi setter de partiellderiverte lik 0 og løser for de ukjente:

$$(1)\ \frac{\partial L}{\partial x_s} = 625 - \frac{750}{850}x_s + \frac{375}{850}\lambda_t = 0$$

$$(2)\ \frac{\partial L}{\partial x_g} = 300 - \frac{400}{980}x_g - \lambda_g + \frac{200}{980}\lambda_t = 0$$

$$(3)\ \frac{\partial L}{\partial x_p} = 100 - \frac{100}{1390}x_p + \frac{50}{1390}\lambda_t = 0$$

$$(4)\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_g} = 900 - x_g = 0$$

$$(5)\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_t} = 575 - \frac{375}{850}x_s - \frac{200}{980}x_g - \frac{50}{1390}x_p = 0$$

Av (4) følger at $x_g = 900$. Vi kan skrive om (1) slik at vi får

$x_s = \lambda_t/2 + 2125/3$

Ved å skrive om (3) får vi:

$x_p = \lambda_t/2 + 1390$

Innsatt i (5) gir dette:

$575 - (375/850)(\lambda_t/2 + 2125/3) - (200/980) - (50/1390)(\lambda_t/2 + 1390) = 0$

som gir

$\lambda_t \approx 120.8$

og

$x_s = \lambda_t/2 + 2125/3 \approx 768.7$

$x_g = 900$

$x_p = \lambda_t/2 + 1390 \approx 1450.4$

e)

Skyggeprisen til restriksjonen med antall tilgjengelige rom på høyresiden er $\lambda_t \approx 120.8$. Det betyr at en marginal endring i høyresiden gir en økning i målfunksjonsverdien på 120.8 per enhet endring. Ettersom problemet ikke er lineært vil dog ikke dette være gyldig annet enn i det punktet vi står i nå. Dersom vi fortsetter å øke høyresiden vil senere økning ikke være like gunstig (ettersom vi har et konvekst problem). Det vil si, videre økning vil ikke ha en like stor forbedrende effekt av å øke høyresiden. Et overestimat på ekstra inntekt blir da 20*120.8 = 2416. (Ved å løse problemet på nytt ville vi sett at faktisk økt inntekt er ≈1578.)

Oppgave 3

a)

Antakelse 1: Både Tiden mellom fødsler og tiden mellom bortganger må være eksponensialfordelt.

Antakelse 2: Vi må kunne angi ”ferdigbehandlingsrater” for hver tilstand. Her er det slik at tiden de snakker (ferdigbehandlingsraten) er avhengig av hvor mange som ”er i systemet” (tilstanden). Derimot har vi i fødsels- og dødsprosesser at tilstanden kun endrer seg fra n til n+1 eller n-1. Det betyr at dersom vi har tre i systemet, så må først en av dem gå ut av systemet og så må de gjenværende ta en tid å behandle som ikke er avhengig av at vi hadde tre i systemet tidligere. De kan altså ikke avslutte praten samtidig. Dette virker som en unaturlig antakelse (skulle tro at alle kunne kjøpt ferdig brusen mens de snakket, slik at siste arbeidstaker kunne gå tilbake til jobb samtidig som nest siste arbeidstaker).

(Det er andre små antakelser: tiden for Kim, Andre og Robin blir ikke påvirket av eventuelt andre som bruker brusautomaten.)

b)

Et forslag er å la hver linje i regnearket svare til en hendelse. På hver linje må vi holde rede på tilstanden, hvilken hendelse vi oppdaterer med nå, og hvilke fremtidige hendelser som allerede er generert. Vi må også holde rede på den informasjonen vi ønsker å beregne, som her inkluderer total tid brukt ved brusautomaten. I forslaget under forutsetter vi at alle arbeidstakerne blir ferdig samtidig (dersom mer enn én arbeidstaker står ved automaten), og at tiden til de blir ferdig å snakke kan være avhengig av hvor mange de er og hvor lenge de allerede hadde stått der før sist ankomne arbeidstaker kom.

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2							
3		Type	Antall ved	Tid til neste	Tid til ferdig		Tid mellom
4	Tid	hendelse	automaten	ankomst	med kjøp		hendelser
5	0	ingen	0	=exp fordelt	=trekk ny		0
6	= tidligste	=ankomst hvis	= forrige + 1	(trekk ny hvis	basert på		=A6-A5
7	av neste	tiden er lik	dersom ankomst	hendelse =	antall ved		...
8	ankomst	forrige tid	ellers lik 0	ankomst eller	automaten		
9	eller ferdig	til neste		ingen)	(trekk ved		
10		ankomst,			ny ankomst)		
11		ellers ferdig			(merk: antar		
12					at alle blir		
13					ferdig-		
14					behandlet		
15					samtidig)		
16					kan også ta hensyn til		
17					hvor lenge de allerede har stått		
18	...				ved ankomst av ny arbeidstaker		
19	Forsett til tid > 8 timer.						
20							
21	Beregn sumproduct(antall ved automaten; tid mellom hendelser), som gir totalt bortsløst tid.						
22							

c)

De mulige tilstandene kan karakteriseres ved hvor mange som står ved brusautomaten. Dette kan være enten 0, 1, 2, eller 3. Hendelsene vil være enten at det kommer en arbeidstaker til brusautomaten, eller at noen av dem forlater brusautomaten. Det er kanskje naturlig å tenke seg at de da forlater den sammen (og ikke på den måten som ville vært implisert av å ha modellert dette som en fødsels- og dødsprosess).

d)

Vi kan bruke inverstransformasjonsmetoden, der vi forutsetter at vi kan få oppgitt tilfeldige tall i intervallet [0,1]:

Vi setter $F(x) = 1 - e^{-\alpha x} = r$, som gir $1 - r = e^{-\alpha x}$. Tar logaritmen på begge sider og får $\ln(1 - r) = -\alpha x$, som gir $x = \ln(1 - r)/(-\alpha)$.