LØSNINGSFORSLAG KONTINUASJONSEKSAMEN VÅR 2013 I TIØ4120 OPERASJONSANALYSE, GK

Oppgave 1

a)

Målfunksjonen (1) summerer profitten ved å produsere x_1 bord og x_2 stoler. Restriksjon (2) sier at antall enheter produsert ikke overstiger kapasiteten til maskinen som brukes i produksjonen. Restriksjon (3) sier at man ikke kan produsere/selge flere stoler enn etterspørselen tilsier. Restriksjon (4) sier at man ikke får bruke mer eik enn det man kjøper inn i hver periode. Restriksjon (5) sier at man må minst produsere 5 bord, slik at man får dekket avtalen. Restriksjon (6) sier at man ikke får produsere et negativt antall stoler.

b)

På utvidet form, med slakk-, overskudd- og kunstvariabler blir formuleringen:

$$\max\ Z = 40x_1 + 55x_2$$

$$x_1 + x_2 + s_1 = 50$$

$$-3x_1 + x_2 + s_2 = 10$$

$$4x_1 + 2x_2 + s_3 = 120$$

$$x_1 - s_4 + a_4 = 5$$

$$x_1, x_2, s_1, s_2, s_3, s_4, a_4 \geq 0$$

For å bruke big-M metoden innfører vi en straff i målfunksjonen for å bruke kunstvariabelen a_4:

$$max\ Z = 40x_1 + 55x_2 - Ma_4$$

Dette skriver vi som $Z - 40x_1 - 55x_2 + Ma_4 = 0$. Ettersom $a_4 = 5 - x_1 + s_4$, kan vi videre skrive

$$Z - (40+M)x_1 - 55x_2 + Ms_4 = -5M$$

hvor målfunksjonslinjen er uttrykt uten å bruke noen av startbasisvariablene (s_1, s_2, s_3, a_4).

Da kan vi sette opp start-tablå for big-M metoden:

BV	Z	x1	x2	s1	s2	s3	s4	a4	rhs
Z	1	-40-M	-55	0	0	0	M	0	-5M
s1	0	1	1	1	0	0	0	0	50
s2	0	-3	1	0	1	0	0	0	10
s3	0	4	2	0	0	1	0	0	120
a4	0	1	0	0	0	0	-1	1	5

Her ser vi at x1 skal pivoteres inn (minste reduserte kostnad), og at a4 skal pivoteres ut (i henhold til forholdstallstesten). Dette gir følgende tablå:

BV	Z	x1	x2	s1	s2	s3	s4	a4	rhs
Z	1	0	-55	0	0	0	-40	40+M	200
s1	0	0	1	1	0	0	1	-1	45
s2	0	0	1	0	1	0	-3	3	25
s3	0	0	2	0	0	1	4	-4	100
x1	0	1	0	0	0	0	-1	1	5

Her ser vi at vi har en tillatt løsning til det opprinnelige problemet (kunstvariabelen tar verdien 0). Den tillatte basisen består av *s1*, *s2*, *s3* og *x1*, med verdier som angitt i rhs-kolonnen.

c)

Vi legger først merke til at begge tablåene (både til Per og Kari) inneholder regnefeil, til tross for hva studentassistenten og eksamensoppgaveteksten sier. Dog er det mulig å besvare oppgaven som den er, uten å rette opp regnefeilene.

Det vi ser her er at det er flere forskjellige optimale basiser, fordi det er tre restriksjoner som skjærer i det optimale punktet: både (2), (3) og (4) er bindende i optimum, men bare to av de tilhørende slakkvariablene trenger å være ikke-basisk (fordi problemet bare har to beslutningsvariabler). Altså kan en av slakkvariablene være i basis (med tilhørende verdi 0!), og vi kan variere dette på tre måter (to av dem er representert ved løsningene til Per og Kari).

Vi ser dette ved at vi har en degenerert basis der noen av slakkvariablene er i basis med verdi 0.

Vi kan også svare ved å påpeke at problemet har alternative optimale dual-løsninger.

d)

Optimal løsning er x1 = 10, x2 = 40, og Z = 2600. Det finnes bare én optimal løsning her (kan vise dette for eksempel ved å tegne problemet grafisk).

e)

I dette svaret forutsetter vi at analysen går ut fra tablåene slik de er gitt i oppgaveteksten (dersom man benytter matriseberegninger vil man få noe forskjellige svar, ettersom tablåene, slik de står, ikke er konsistente med starttablået).

Vi må analysere begge tablåene (både til Per og til Kari). La oss starte med Pers tablå, og endre høyresiden av opprinnelig restriksjon (3) med Δ. Det er s2 som er den tilhørende slakkvariabelen, og som derfor sier oss hvordan det optimale tablået endres av endringen i det opprinnelige tablået:

BV	Z	x1	x2	s1	s2	s3	s4	a4	RHS
Z	1	0	0	0	15/4	0	0	M	2600 + Δ*15/4
s4	0	0	0	1/4	-1/4	0	1	-1	5 – Δ/4
x2	0	0	1	3/4	1/4	0	0	0	40 + Δ/4
s3	0	0	0	-10/4	10/4	1	0	0	0 + Δ*10/4
x1	0	1	0	1/4	-1/4	0	0	0	10 – Δ/4

Vi ser at en endring på Δ gir en endring i målfunksjonen på Δ*15/4. For hvilke Δ gjelder dette? Jo, så lenge høyresidene er ikke-negative. Dette gjelder kun dersom $0 \leq \Delta \leq 20$.

La oss gjøre det samme ut fra Karis tablå. Dette gir:

BV	Z	x1	x2	s1	s2	s3	s4	a4	RHS
Z	1	0	0	0	55	205/10	0	M	2600 + Δ*55
s1	0	0	0	1	-1	-4/10	0	0	–Δ
x2	0	0	1	0	1	3/10	0	0	40 + Δ
s4	0	0	0	0	0	1/10	1	-1	5
x1	0	1	0	0	0	1/10	0	0	10

Her ser vi at en endring på Δ gir en endring i målfunksjonen på Δ*55. Dette er dog gyldig kun dersom høyresidene forblir ikke-negative, hvilket svarer til $-40 \leq \Delta \leq 0$.

Vi kan altså konkludere med at bedriften tjener 15/4 kroner per enhet i økt fast etterspørsel, mens de taper 55 kroner per enhet i redusert fast etterspørsel.

Tillegg til LF: For å se hvordan Per og Kari kunne komme fram til ulike tablåer (vi vil her rette opp regnefeilene som ble gjort også) start med tablået fra deloppgave b):

BV	Z	x1	x2	s1	s2	s3	s4	a4	rhs
Z	1	0	-55	0	0	0	-40	40+M	200
s1	0	0	1	1	0	0	1	-1	45
s2	0	0	1	0	1	0	-3	3	25
s3	0	0	2	0	0	1	4	-4	100
x1	0	1	0	0	0	0	-1	1	5

Dette er ikke optimalt. Prøver først å pivotere inn x2 (ut går da s2):

BV	Z	x1	x2	s1	s2	s3	s4	a4	rhs
Z	1	0	0	0	55	0	-205	205+M	1575
s1	0	0	0	1	-1	0	4	-4	20
x2	0	0	1	0	1	0	-3	3	25
s3	0	0	0	0	**-2**	1	10	-10	50
x1	0	1	0	0	0	0	-1	1	5

Resultatet er fremdeles ikke optimalt. Vi må nå pivotere inn s4, og ut går da s1 (eller s3, se nedenfor), noe som gir tablået til Per (korrigerte tall i fet skrift):

BV	Z	x1	x2	s1	s2	s3	s4	a4	rhs
Z	1	0	0	**205/4**	15/4	0	0	M	2600
s4	0	0	0	1/4	-1/4	0	1	-1	5
x2	0	0	1	3/4	1/4	0	0	0	40
s3	0	0	0	-10/4	**1/2**	1	0	0	0
x1	0	1	0	1/4	-1/4	0	0	0	10

Eventuelt kan vi altså pivotere inn s4 og ut s3 (for s1, se ovenfor), og dermed få tablået til Kari (korrigerte tall i fet skrift):

BV	Z	x1	x2	s1	s2	s3	s4	a4	rhs
Z	1	0	0	0	**14**	205/10	0	M	2600
s1	0	0	0	1	**-1/5**	-4/10	0	0	0
x2	0	0	1	0	**4/10**	3/10	0	0	40
s4	0	0	0	0	**-1/5**	1/10	1	-1	5
x1	0	1	0	0	**-1/5**	1/10	0	0	10

For gøy, la oss også se hva som skjer når vi (fra sist oppgitte tablå) pivoterer inn s2 i bytte med s1:

BV	Z	x1	x2	s1	s2	s3	s4	a4	rhs
Z	1	0	0	70	0	-15/10	0	M	2600
s2	0	0	0	-5	1	2	0	0	0
x2	0	0	1	2	0	-1/2	0	0	40
s4	0	0	0	-1	0	1/2	1	-1	5
x1	0	1	0	-1	0	1/2	0	0	10

Dette tablået er ikke optimalt (da en av de reduserte kostnadene er negative), men vi har den optimale løsningen for x1 og x2 (det vi mangler er en optimal dual-løsning). Vi har en degenerert basis også her, fordi en av basisvariablene (s2) har verdi 0.

Oppgave 2

a) La i være antall klienter i kø og under betjening i det øyeblikket en ny klient ankommer. Dersom klienten velger å entre køen vil den forventede tiden kunden vil befinne seg i systemet være $(i+1)/\mu$ (i andre klienter foran den nyankommede i systemet + betjeningen til den nyankommede selv) og netto gevinst vil være $R - \frac{C(i+1)}{\mu}$. Dersom klienten ikke entrer køen vil netto gevinst være 0. Vi ønsker å finne det minste antall kunder, n, som gjør at en nyankommet klient ikke vil entre køen. Dette tallet n kan finnes ved å betrakte følgende to ulikheter

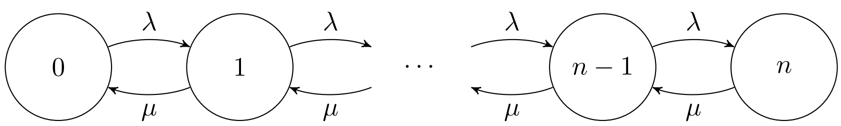
$$R - \frac{C((n-1)+1)}{\mu} \geq 0 \tag{1}$$

$$R - \frac{C(n+1)}{\mu} < 0 \tag{2}$$

Ulikhet (1) beskriver caset hvor antallet i systemet er $n-1$ og netto gevinst for å entre køen er ikke-negativ (og klienten entrer), mens (2) beskriver caset hvor antallet kunder allerede i systemet er n og netto gevinst for å entre er negativ. Med omskriving kan n nå uttrykkes som $n \leq \frac{R\mu}{C}$, som videre gir (3).

$$n = \lfloor \frac{R\mu}{C} \rfloor \tag{3}$$

b) Fødsels- og dødsprosessen kan tegnes som vist under, hvor tilstanden angir antall i systemet. Merk at det maksimalt vil være n klienter i systemet ettersom ingen vil klienter vil ha positiv netto gevinst av å entre køen dersom det allerede er n klienter til stede (og vil da heller ikke entre køen).



Selv om det i dette køsystemet ikke er en eksplisitt øvre begrensning på antall som kan være i systemet samtidig, så vil klientenes gevinst-funksjon regulere dette. Siden ankomstene er Poisson, betjeningen er eksponentialfordelt, antallet betjenere (leger) er 1 og maksimalt antall klienter i systemet samtidig er n, kan man betrakte systemet som en $M/M/1/n$-kø, uttrykt med Kendalls notasjon.

c) For å finne et uttrykk for sannsynligheten for at det er i klienter i systemet, p_i, starter vi med å se at sammenhengen mellom p_i, p_{i-1} og p_0 kan uttrykkes som i (4). Nå følger vi samme utledning som læreboka på side 786 og får først et uttrykk for p_0 (5) og deretter p_i (6).

$$p_i = \frac{\lambda}{\mu} p_{i-1} = \rho p_{i-1} = \rho^i p_0 \tag{4}$$

$$p_0 = \frac{1}{\sum_{i=0}^{n} \rho^i} = 1/\left(\frac{1-\rho^{n+1}}{1-\rho}\right) = \frac{1-\rho}{1-\rho^{n+1}} \tag{5}$$

$$p_i = \rho^i \frac{1-\rho}{1-\rho^{n+1}} \tag{6}$$

d) Klientene vil entre systemet dersom det er færre enn n klienter der allerede. Sannsynligheten for at en klient da velger å entre systemet, si p_E, er summen av sannsynlighetene for at det er 0 til $n-1$ klienter allerede i systemet når den nye klienten ankommer, som er lik sannsynligheten $1 - P(\text{entrer ikke})$.

$$p_E = \sum_{i=0}^{n-1} p_i = 1 - p_n = 1 - \rho^n \frac{1-\rho}{1-\rho^{n+1}} = \frac{1-\rho^n}{1-\rho^{n+1}} \tag{7}$$

e) Ved hjelp av Littles formel kan vi uttrykk forventet tid i systemet, W som:

$$W = \frac{L}{\bar{\lambda}}$$

hvor $\bar{\lambda}$ er gjennomsnittlig ankomstrate, og gitt av:

$$\bar{\lambda} = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i p_i = \lambda \sum_{i=0}^{n-1} p_i = \lambda(1 - p_n) = \lambda p_E$$

Dette gir følgende forventede tid i systemet ved å sette inn parameterverdiene:

$$W = 5.3952/3.8450 = 1.403$$

Merk at vi i dette systemet ikke har lik λ for alle tilstander ($\lambda_i = 0$ når $i \geq n$) og derfor må beregne en gjennomsnittlig ankomstrate.

f) I stedet for at klientene kan sjekke om den faktiske kølengden er n eller mer ved ankomst og dermed ikke entre køen, må kundene nå gjøre beslutningen basert på forventet antall hos legekontoret mens de ennå er hjemme. Det vil føre til at noen klienter vil få positiv nettogevinst, forbi den faktiske kølengden var kortere enn forventet, mens andre klienter får negativ netto gevinst. Det vil altså ikke være en øvre grense for hvor mange som vil være i systemet og med fortsatt Poisson ankomst og betjening og én lege, vil vi nå ha en $M/M/1$-kø.

g) Den faktiske ankomstraten, γ, vil reguleres av klientenes beslutninger som tas med bakgrunn i forventet netto gevinst (8). Merk at klientene ikke har informasjon om hvor mange som befinner seg i systemet på tidspunktet den tar beslutningen, men kun informasjon om forventet antall og tid i systemet. Siden forventet tid i systemet i en $M/M/1$-kø med ankomstrate γ er $1/(\mu - \gamma)$ er forventet kostnad $C/(\mu - \gamma)$.

$$R - C\frac{1}{\mu - \gamma} \tag{8}$$

Ankomstraten, γ, vil regulere seg slik at forventet nettogevinst er 0 (9). Grunnen til dette er at dersom man har positivt forventet nettogevinst, vil flere klienter se det som fordelaktig å dra til legekontoret og γ vil øke helt til nettogevinsten er 0. På samme måte vil færre dra til legekontoret dersom nettogevinsten er negativ. Dermed kan γ utrykkes som i (10).

$$R - C\frac{1}{\mu - \gamma} = 0 \tag{9}$$

$$\gamma = \mu - \frac{C}{R} \tag{10}$$

h) Ved å bruke den oppgitte formelen L i et $M/M/1$-system, kan man beregne W vha. Littles formel, på samme måte som i e).

$$W = \frac{L}{\gamma} = \frac{1}{\mu - (\mu - \frac{C}{R})} = \frac{R}{C} = \frac{100}{50} = 2 \tag{11}$$

Oppgave 3 (20 %)

a)

Vi definerer først følgende beslutningsvariable:

y_i = antall vindmøller i park i, $i = 1,2$ (heltallsvariabel)

x_{li} = 1 dersom overføringskabel l benyttes for vindmøllepark i, og 0 ellers (binærvariabel)

Vi ønsker å minimere kostnader samtidig som vi må tilfredsstille følgende restriksjoner:

1. Øvre grense på antall vindmøller i hver park.
2. Overføringskapasiteten må være minst like stor som det som totalt (gjennomsnittlig) produseres i hver vindmøllepark.
3. Det kan kun være én overføringskabel fra hver vindmøllepark.
4. Kontraktsforpliktelser for levering av strøm.

Dette kan vi da modellere på følgende måte (restriksjonsnumrene sammenfaller med listen over):

$$\min z = \sum_{i=1}^{2} C^M y_i + \sum_{l=1}^{L} \sum_{i=1}^{2} C_{li}^L x_{li} \qquad (0)$$

$$y_i \leq N \qquad i = 1,2 \qquad (1)$$

$$P_i y_i \leq \sum_{l=1}^{L} Q_l x_{li} \qquad i = 1,2 \qquad (2)$$

$$\sum_{l=1}^{L} x_{li} \leq 1 \qquad i = 1,2 \qquad (3)$$

$$\sum_{i=1}^{2} P_i y_i \geq D \qquad (4)$$

$$y_i \geq 0, \text{ og heltallig} \qquad i = 1,2 \qquad (5)$$

$$x_{li} \in \{0,1\} \qquad l = 1,2,\ldots,L \text{ og } i = 1,2 \qquad (6)$$

En kan legge merke til at det i restriksjon (3) er $\leq$ og ikke =. Det er fordi en ikke nødvendigvis behøver noen overføringskabel dersom en ikke velger å ha noen vindmøller i den aktuelle parken.

b)

Nå er det altså opptil tre mulige vindmølleparker, så variablene y_i og x_{li} må defineres for $i = 1,2,3$. Det samme gjelder for restriksjonene (1), (2), (3) og (5). I tillegg definerer vi nå en ny variabel δ_3 som er lik 1 dersom bedriften etablerer den tredje vindmølleparken, og 0 ellers.
Den opprinnelige modellen må dermed endres som følger:

$$\min z = \sum_{i=1}^{3} C^M y_i + \sum_{l=1}^{L} \sum_{i=1}^{3} C_{li}^L x_{li} + C^I \delta_3 \qquad (0')$$

$$y_i \leq N \qquad i = 1,2,3 \qquad (1')$$

$$P y_i \leq \sum_{l=1}^{L} Q_l x_{li} \qquad i = 1,2,3 \qquad (2')$$

$$\sum_{l=1}^{L} x_{li} \leq 1 \qquad i = 1,2,3 \qquad (3')$$

$$\sum_{i=1}^{3} P y_i \geq D \qquad (4')$$

$$y_i \geq 0, \text{ og heltallig} \qquad i = 1,2,3 \qquad (5')$$

$$x_{li} \in \{0,1\} \qquad l = 1,2,\dots,L \text{ og } i = 1,2,3 \qquad (6')$$

En kan imidlertid merke seg at dersom $x_{l3} = 1$, betyr det at en velger overføringskabel l fra vindmøllepark 3 til park 1. Det betyr videre at den valgte overføringskabelen fra park 1 til land må ha tilstrekkelig kapasitet til å kunne overføre det som produseres fra begge vindmølleparkene 1 og 3. Dette må inn i en ny restriksjon som følger:

$$P y_1 + P y_3 \leq \sum_{l=1}^{L} Q_l x_{l1} \qquad (7')$$

En må også sikre seg at en kun bygger vindmøller i park 3 dersom en faktisk har etablert vindmølleparken (altså at $\delta_3 = 1$). Den følgende restriksjonen vil sikre dette:

$$y_3 \leq N \delta_3 \qquad (8')$$

$$\delta_3 \in \{0,1\} \qquad (9')$$