En samling gamle eksamensoppgaver med løsningsforslag

Dette er en samling av gamle eksamensoppgaver som ble samlet i forbindelse med kurset TIØ4126.

Det er noe overlapp mellom TIØ4120 og TIØ4126, så en del av disse oppgavene er også relevante for oss. Derimot er ikke kommentarene som ble skrevet inn i forbindelse med TIØ4126 relevant, fordi en del av oppgavene dekker områder som ikke var pensum i TIØ4126 men som er pensum for oss, og omvendt. Ignorer derfor kommentarene utenom oppgavene, og vurder selv om årets pensum i TIØ4120 er dekket av oppgaven.

Trondheim, 27.09.2013

Lars Magnus Hvattum

<u>Oppgave 2</u> (vekt 15%)

- **Gitt i Eksamen i Mikroøkonomi og optimering 14. august 2008**
- **Oppgave a) er relevant, oppgave b) skal også la seg løse ved å ta i bruk pensum (selv om LF benytter en metode som nok vil føles noe fremmed)**
- **Oppgavene c) og d) baserer seg på bruk av dualitetsteori, som ikke er pensum**

Du er ansatt som konsulent i en bedrift for å løse et viktig planleggingsproblem, med to beslutningsvariable, x_1 og x_2, og tre restriksjoner som angir maks tilgjengelige ressurser. Tidligere ansatte har allerede laget en LP-modell for problemet, men noen av dataene i modellen er mistet. Problemet som skal løses er formulert i utvidet form som følger:

$$\max \; Z = \mathbf{c}^T \mathbf{x}$$

når

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}\,,$$
$$\mathbf{x} \geq 0\,,$$

$$\text{når} \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ 0 & 1 & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ 1 & 1 & a_{33} & a_{34} & a_{35} \end{pmatrix}, \; \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -12 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}, \text{ og } \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \end{pmatrix}.$$

a) Hva er tallverdiene som mangler i **A**-matrisa og **c**-vektoren?

b) Du får vite at restriksjonene 2 og 3 er bindende i optimal løsning, mens restriksjon 1 ikke er det. Hva er optimal verdi på de to beslutningsvariablene, x_1 og x_2? Bestem optimal verdi på målfunksjonen.

c) Du får vite av ansatte i bedriften at én ekstra ressursenhet i restriksjon 2 har en verdi på 3. Hvor mye er maksimalt bedriften villig til å betale for én ekstra ressursenhet for hhv. restriksjon 1 og 3?

d) Formuler dualen (ikke matriseform) for problemet gitt innledningsvis.

<u>Løsning Oppgave 2</u> (aug 2008)

a)

Siden problemet har to beslutningsvariable, må de tre resterende være slakkvariable, dvs. at $c_3 = c_4 = c_5 = 0$, $a_{13} = a_{24} = a_{35} = 1$, mens de resterende i A-matrisa er null.

b)

Siden restriksjon 1 ikke er bindende, mens de to andre er, må slakkvariabelen tilhørende restriksjon være i basis, dvs. $x_3 \geq 0$, mens de to andre slakkvariablene $x_4 = x_5 = 0$. Siden vi skal ha tre variable i basis (siden det er tre restriksjoner) må også beslutningsvariablene $x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$, være i basis. Da er basismatrisa vår $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, samtidig som vi vet at $\mathbf{Bx}_B = \mathbf{b}$. Dersom vi løser ut dette før vi følgende tre ligninger:

$$\begin{aligned}
&1)\quad -x_1 - 2x_2 + x_3 = -12 \\
&2)\quad x_2 = 6 \\
&3)\quad x_1 + x_2 = 8
\end{aligned}$$

Løser vi ut dette finner vi: $x_1 = 2,\ x_2 = 6, x_3 = 2$, og $Z^* = 34$.

NB! Siden vi vet at 1) ikke er bindende, hadde det vært tilstrekkelig å løse ut for 2) og 3) og funnet verdiene for x_1 og x_2.

c)

Vi får vite at $y_2 = 3$. Fra før vet vi at $y_1 = 0$, siden restriksjon 1 ikke er bindende. Vi vet også følgende:

$Z^* = W^* = \mathbf{yb} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -12 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix} = 18 + 8y_3 = 34 \quad \Rightarrow \quad y_3 = 2$. Det betyr at verdien med å øke ressurstilgangen for restriksjon 3 med én enhet er 2.

d)

Primalen blir i full form (ikke utvidet form) som følger:

$$
\begin{aligned}
&\max \ \ \mathrm{Z}{=}2x_1 + 6x_2 \\
&\textit{når} \\
&-x_1 - 2x_2 \le -12 \\
&\qquad\quad x_2 \le 6 \\
&\ x_1 + \ \ \ x_2 \le 8 \\
&x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

Dvs. at primalen blir som følger:

$$
\begin{aligned}
&\min \ \ \mathrm{W}{=}\text{-}12y_1 + 6y_2 + 8y_3 \\
&\textit{når} \\
&-y_1 + \qquad y_3 \ge 2 \\
&\text{-}2y_1 + y_2 + y_3 \ge 6 \\
&y_1, y_2, y_3 \ge 0
\end{aligned}
$$

<u>Oppgave 4</u> (vekt 20%)

- **Gitt i Eksamen i Mikroøkonomi og optimering 14. august 2008**

Du har fått ny jobb i en bedrift som produserer to typer laksefôr. For hver av disse fôrtypene, brukes det to typer råvarer som det er begrenset tilgang på. For råvare 1 er 1000 tonn tilgjengelig i kommende planleggingsperiode, mens det tilsvarende tallet for råvaretype 2 er 800 tonn. Det brukes ingen andre innsatsvarer i produksjonen enn disse to råvarene, og vi antar at det blir ingen avfallsstoffer (det betyr at vekten av det som benyttes av innsatsvarer = vekten av ferdig produkt).

Bedriften har inngått en avtale med en lakseprodusent om å levere eksakt 600 tonn av fôrtype 1 og 1000 tonn av type 2. Det stilles også kvalitetskrav til de to fôrtypene. Type 1 skal maksimalt inneholde 40 % av komponent A (fett) og minimum 30 % av komponent B (protein), mens type 2 skal maksimalt inneholde 50 % av komponent A og minimum 40 % av komponent B.

Råvare 1 inneholder 50 % komponent A og 30 % komponent B, mens råvare 2 inneholder 30 % komponent A og 60 % komponent B.

Kostnaden i 1000 kroner/tonn er 4 for råvare 1 og 8 for råvare 2. Faste kostnader for den kommende planleggingsperioden er 1 million kroner. Bedriften ønsker å minimere kostnaden for produksjonen som tilfredsstiller alle ovennevnte krav.

a) Formuler bedriftens planleggingsproblem som et LP-problem med bruk at tallene fra oppgaveteksten.

Sensitivitetsrapporten for løsningen på problemet i delspørsmål a) er gitt i vedlegg 1.

b) Hva kan du si om den nye løsningen (råvaremiks og kostnad) dersom:

1) Tilgangen for råvare 1 reduseres med 100 tonn?
2) Tilgangen for råvare 2 reduseres med 100 tonn?

Begrunn svarene uten å gjøre omfattende beregninger.

Du blir tilbudt å investere i en ny maskin som gjør at du får utnyttet råvarene noe bedre. I praksis betyr dette at kvalitetskravet for fôrtype 1 gjøres litt mindre streng, slik at det ved bruk av ny maskin kan tillates opptil 41 % av komponent A (istedet for 40 %). Kvalitetskravene forøvrig forblir uendret. Maskinen koster såpass mye at kostnadene for den kommende planleggingsperioden (og de påfølgende deretter) vil øke med C dersom en investerer i ny maskin.

c) Formuler bedriftens nye planlegginsproblem, der investeringsbeslutningen inkluderes i modellen.

d) Du får nå vite at kostnaden C = 100 tusen kroner. Bør bedriften investere i ny maskin eller ikke? Begrunn svaret.

Vedlegg 1

Microsoft Excel 11.0 Sensitivity Report
Worksheet: [Kont 2008.xls]Sheet1
Report Created: 2008-07-10 10:57:19

Adjustable Cells

Cell	Name	Final Value	Reduced Cost	Objective Coefficient	Allowable Increase	Allowable Decrease
$B$19	Solution x11	300	0	4	4	1E+30
$C$19	Solution x12	667	0	4	4	1E+30
$D$19	Solution x21	300	0	8	1E+30	4
$E$19	Solution x22	333	0	8	1E+30	4

Constraints

Cell	Name	Final Value	Shadow Price	Constraint R.H. Side	Allowable Increase	Allowable Decrease
$F$6	Supply raw material 1 Res. used	966,7	0,0	1000	1E+30	33,33333333
$F$7	Supply raw material 2 Res. used	633,3	0,0	800	1E+30	166,6666667
$F$12	Required ratio of component B, product 1 Res. used	0,45	0,00	0,3	0,15	1E+30
$F$8	Delivery requirements, product 1 Res. used	600,0	14,0	600	66,66666667	22,22222222
$F$10	Required ratio of component A, product 1 Res. used	0,40	-12000,00	0,4	0,011111111	0,055555556
$F$11	Required ratio of component A, product 2 Res. used	0,43	0,00	0,5	1E+30	0,066666667
$F$13	Required ratio of component B, product 2 Res. used	0,40	13333,33	0,4	0,05	0,01
$F$9	Delivery requirements, product 2 Res. used	1000,0	0,0	1000	16,66666667	166,6666667

<u>Løsning oppgave 4</u> (aug 2008)

a)

Vi definerer x_{ij} som beslutningsvariabel, som sier hvor mye av råstoff *i* som benyttes i fôrtype *j*. Problemet kan da formuleres som følgende minimeringsproblem:

$$
\begin{aligned}
&\min\ Z=4(x_{11}+x_{12})+8(x_{21}+x_{22})\\
&\textit{når}\\
&1)\ \ x_{11}+x_{12}\le 1000\\
&2)\ \ x_{21}+x_{22}\le 800\\
&3)\ \ x_{11}+x_{21}=600\\
&4)\ \ x_{12}+x_{22}=1000\\
&5)\ \ 0{,}5x_{11}+0{,}3x_{21}\le 0{,}4*600\\
&6)\ \ 0{,}5x_{12}+0{,}3x_{22}\le 0{,}5*1000\\
&7)\ \ 0{,}3x_{11}+0{,}6x_{21}\ge 0{,}3*600\\
&8)\ \ 0{,}3x_{12}+0{,}6x_{22}\ge 0{,}4*1000\\
&x_{11},x_{12},x_{21},x_{22}\ge 0
\end{aligned}
$$

1) Tilgangsrestriksjon råstoff 1
2) Tilgangsrestriksjon råstoff 2
3) Leveringskrav fôrtype 1
4) Leveringskrav fôrtype 2
5) Kvalitetskrav komponent A fôrtype 1
6) Kvalitetskrav komponent A fôrtype 2
7) Kvalitetskrav komponent B fôrtype 1
8) Kvalitetskrav komponent B fôrtype 2

NB! Vi ser bort fra de faste kostnadene da de ikke påvirker den optimal løsningen.

b)

1) ”Allowable decrease” er 33,33, dvs. at optimal løsning endres ved en tilgangsreduksjon på 100 tonn. Problemet må løses på ny for å finne denne.
2) ”Allowable decrease” er her 166,67, dvs. at optimal løsning forblir uendret ved en reduksjon på 100 tonn. Kostnaden forblir også uendret.

c)

Innfører nå investeringsvariabelen ∂ som tar verdien 1 dersom en gjør investering i ny maskin, og 0 ellers. Ny modell blir som følger:

$$
\begin{aligned}
&\min \ \text{Z}=4(x_{11}+x_{12})+8(x_{21}+x_{22})+C\partial \\
&\textit{når} \\
&1)\ \ x_{11}+x_{12}\le 1000 \\
&2)\ \ x_{21}+x_{22}\le 800 \\
&3)\ \ x_{11}+x_{21}=600 \\
&4)\ \ x_{12}+x_{22}=1000 \\
&5)\ \ 0{,}5x_{11}+0{,}3x_{21}\le (0{,}4+0{,}01\partial)*600 \\
&6)\ \ 0{,}6x_{12}+0{,}3x_{22}\le 0{,}5*1000 \\
&7)\ \ 0{,}3x_{11}+0{,}4x_{21}\ge 0{,}3*600 \\
&8)\ \ 0{,}3x_{12}+0{,}5x_{22}\ge 0{,}4*1000 \\
&x_{11},x_{12},x_{21},x_{22}\ge 0,\partial\in\{0,1\}
\end{aligned}
$$

d)

Skyggeprisen for den aktuelle restriksjonen er -12000, dvs. dersom høyresiden øker med én enhet vil kostnaden reduseres med 12000. ”Allowable increase” er 0,011, dvs. at en økning på 0,01 til 0,41 (eller 41 %) er tillatt uten at optimal løsning endres. En slik økning vil gi en kostnadsreduksjon på 0,01*12000=120, dvs. at kostnadsreduksjonen er større enn investeringskostnaden, følgelig bør bedriften investere i ny maskin.

<u>Oppgave 5</u> (vekt 15%)

- **Gitt i Eksamen i Mikroøkonomi og optimering 14. august 2008**

En bedrift har kommet fram til følgende funksjon som uttrykker kostnadsfunksjonen i et planleggingsproblem:

$$f(x_1, x_2) = 0,3x_1^2 - 2x_1 + 0,2x_2^2 - 4x_2 + 20$$

a) Hva er lavest mulige kostnad? Vis at det er et minimumspunkt du har funnet.

x_1 og x_2 i oppg. a) angir mengden av råstoff 1 og 2 benyttet i en gitt periode. Det viser seg at det er en begrensning i tilgangen på dette slik at det kan forbrukes maksimalt 10 enheter av de to råstoffene tilsammen.

b) Formuler planleggingsproblemet, og regn ut den optimale løsningen.

c) Hva er effekten dersom bedriften greier å forhandle seg fram til økt råstofftilgang med én enhet til 11 enheter?

d) Dersom råstofftilgangen hadde vært 14 i utgangspunktet (istedet for 10), hvor mye ville du da vært villig til å betale for én ekstra ressursenhet?

<u>Løsning oppgave 5</u> (august 2008)

En bedrift har kommet fram til følgende funksjon som uttrykker profittfunksjonen i et planleggingsproblem:

$$f(x_1, x_2) = 0,3x_1^2 - 2x_1 + 0,2x_2^2 - 4x_2 - 20$$

a)

Deriverer kostnadsfunksjonen og setter det lik null:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0,6x_1 - 2 = 0 \Rightarrow x_1 = 3,333$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = 0,4x_2 - 4 = 0 \Rightarrow x_2 = 10$$

$$\Rightarrow f^*(x_1, x_2) = -3,3333$$

Dette er et minimumspunkt siden $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^{\ 2}} > 0, \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^{\ 2}} > 0,$ og $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = 0$.

b)

Problemet kan nå formuleres som følger (ser bort fra konstanten i kostnadsfunksjonen, da den ikke påvirker optimal løsning):

$$\begin{aligned}&\min f(x_1, x_2) = 0,3x_1^2 - 2x_1 + 0,2x_2^2 - 4x_2\\ &\text{når}\\ &x_1 + x_2 \le 10\\ &x_1, x_2 \ge 0\end{aligned}$$

Fra a) vet vi at vi ønsker å bruke opp hele tilgangen, dvs. vi kan sette $x_1 + x_2 = 10$. Vi kan da definere følgende Lagrangefunksjon:

$$L(x_1, x_2, \lambda) = 0,3x_1^2 - 2x_1 + 0,2x_2^2 - 4x_2 - \lambda(10 - x_1 - x_2)$$

Ved å derivere denne kan vi finne optimal løsning:

1) $\frac{\partial L}{\partial x_1} = 0,6x_1 - 2 + \lambda = 0$

2) $\frac{\partial L}{\partial x_2} = 0,4x_2 - 4 + \lambda = 0$

3) $\frac{\partial L}{\partial \lambda} = x_1 + x_2 - 10 = 0$

Ved å løse dette ligningssettet finner vi: $x_1 = 2, x_2 = 8, \lambda = 0,8$. Dette gir igjen $f^*(x_1, x_2) = -2$ (konstantledd inkludert).

NB! Vi løste dette litt forenklet ved ikke å ta inn ikke-negativitetskravene i Lagrangefunksjonen. Men siden løsningen ga $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ er løsningen gyldig. For å sikre en løsning med $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$, kunne vi tatt inn disse kravene i funksjonen med hver sin Lagrangemultiplikator og løst det, men da hadde vi fått to ekstra variable.

c)

Dersom en får muligheten til å øke råvaretilgangen med én enhet vil dette gi kostnadsbesparelse på 0,8 siden $\lambda = 0,8$.

d)

Dersom råvaretilgangen hadde vært 14, ville verdien av én ekstra enhet vært null, ettersom vi i løsningen i a) for det ubeskrankede problemet ikke benytter mer enn 13,3333.

<u>Oppgave 2</u> (vekt 35 %)

- **Gitt i Eksamen i Mikroøkonomi og optimering 10. desember 2007**
- **Oppgave c) baseres på bruk av dualitetseori som ikke er pensum**
- **Oppgave f) baseres på bruk av revidert Simplex som ikke er pensum**

Bedriften Helsekost AS produserer to ulike typer helsekostdrikker; *Sunshake* og *Winterbreeze*. Bedriften skal planlegge produksjonen for neste periode.

For hver 100 kg som produseres av Sunshake kreves det 4 kg av en proteintilsetning, mens det kreves 5 kg av en spesiell smakstilsetning. For hver 100 kg av Winterbreeze er de tilsvarende tallene hhv. 6 og 3 kg. Ellers er det kun vann som inngår i produktene (kan antas å ha null kostnad). I den neste perioden har bedriften 50 kg proteintilsetning og 40 kg av smakstilsetningen tilgjengelig. Det er ingen begrensninger på andre innsatsfaktorer.

Fra produksjonen følger også et avfallsprodukt. For hver 100 kg av Sunshake følger det 1 enhet avfallsprodukt, mens det tilsvarende tallet fra Winterbreezeproduksjonen er 1.5 enhet. For å slippe kostbar avfallshåndtering har Helsekost AS inngått en avtale med en annen bedrift som kan nyttiggjøre seg alt avfallsprodukt forutsatt at det leveres i tilstrekkelige mengder. Avtalen innebærer derfor at Helsekost AS i løpet av perioden må levere minst 10 enheter av avfallsproduktet. Vi antar at det er ingen kostnader eller inntekter forbundet med dette for Helsekost AS.

Prisen per 100 kg er 18 000 kroner for Sunshake og 19 000 kroner for Winterbreeze. Bedriftens kostnader er 2000 kr/kg for proteintilsetningen og 1000 kr/kg for smakstilsetningen. Faste kostnader er 30 000 kroner for kommende planleggings-periode. Bedriften ønsker å maksimere profitten.

a) Formuler planleggingsproblemet med tallene oppgitt i oppgaveteksten. Skaler tallene fornuftig.

b) Hvor mange restriksjoner kan maksimalt være bindende? Begrunn svaret.

c) Formuler dualen til planleggingsproblemet i a). Gi en praktisk tolkning av fortegnskravene på dualvariablene.
I hvilke tilfeller kan det være hensiktsmessig å løse planleggingsproblemet ved å løse dualen istedet for det originale planleggingsproblemet? Svar generelt.

d) Sensitivitetsrapporten fra Excel for den optimal løsningen av dualproblemet er gitt i vedlegg A. Konkluder ut fra denne hva den optimale produksjonen og profitten for planleggingsproblemet i a) blir.

e) Anta at bedriften kan være i stand til å øke tilgangen på proteintilsetning. Hvor mye kan bedriften øke denne tilgangen uten at optimal basis endres? Hvor mye høyere profitt oppnår bedriften som følge av en slik økning? Begrunn svarene.

Se nå bort fra den økte tilgangen på proteintilsetning. Helsekost AS sine produktutviklere har utviklet et nytt produkt, *Betaglux*, som de vurderer å starte produksjon av. For å produsere 100 kg av det nye produktet kreves 3 kg proteintilsetning og 3 kg smakstilsetning, mens det gir 2 enheter avfallsprodukt. Salgsavdelingen estimerer oppnåelig salgspris på Betaglux til 12 500 kroner/100 kg.

f) Bør bedriften starte produksjon av det nye produktet? I så fall, hva blir den nye optimale løsningen?

Se bort fra opplysningen om det nye produktet i det følgende. Helsekost AS vurderer å leie nytt og moderne produksjonsutstyr i kommende periode til en kostnad på *P* kroner. Dersom de leier dette utstyret vil det ikke lenger bli noe avfallsprodukt fra produksjonen.

g) Utvid modellen i a) slik at den også inkluderer hvorvidt en skal velge å leie nytt produksjonsutstyr eller ikke. Bør de leie det nye produksjonsutstyret? Begrunn svaret.

Vedlegg A

Vedlegg A.1

Microsoft Excel 11.0 Sensitivity Report
Worksheet: [Eksamen 2007.xls]Dual formulation
Report Created: 2007-11-23 15:23:13

Adjustable Cells

Cell	Name	Final Value	Reduced Cost	Objective Coefficient	Allowable Increase	Allowable Decrease
$D$12	Løsning y1	0,277777778	0	50	30	9,999999998
$E$12	Løsning y2	0,777777778	0	40	22,5	15
$F$12	Løsning y3	0	-2,5	10	2,5	1E+30

Constraints

Cell	Name	Final Value	Shadow Price	Constraint R.H. Side	Allowable Increase	Allowable Decrease
$G$7	Dual constr. 1 Total	5	5	5	1E+30	2,333333333
$G$8	Dual constr. 2 Total	4	5	4	3,5	1E+30
$I$24	Tilgjengelig	0	0	0	0	1E+30

<u>Løsning oppgave 2</u> (desember 2007)

a)
Definerer:

x_1 Antall enheter produsert av Sunshake

x_2 Antall enheter produsert av Winterbreeze

Profittfunksjon:

$$Z = 18x_1 + 19x_2 - 2(4x_1 + 6x_2) - 1(5x_1 + 3x_2) = 5x_1 + 4x_2$$

NB! Ser bort fra faste kostnader og maksimerer dekningsbidrag. Faste kostnader har likevel ingen påvirkning på produksjonsplanleggingen.

LP-formulering:

	$\max Z = 5x_1 + 4x_2$	(0)	Profittfunksjon
når	$4x_1 + 6x_2 \le 50$	(1)	Tilgang proteintilsetning
	$5x_1 + 3x_2 \le 40$	(2)	Tilgang smak
	$x_1 + 1.5x_2 \ge 10$	(3)	Biprodukt-krav
	$x_1, x_2 \ge 0$		Ikke-negativitetskrav

b)
Maksimalt 2 restriksjoner kan være bindende. Når det er tre restriksjoner vil det alltid være tre variabler i basis. Siden vi bare har to originale beslutningsvariabler, betyr det at minst én basisvariabel må være en slakk- eller overskuddsvariabel. Restriksjonen tilhørende denne slakk- eller overskuddsvariabelen kan ikke være bindende (med mindre den har verdien null i basis).

c)
Dualformulering:

	$\min W = 50y_1 + 40y_2 + 10y_3$	(0')
når	$4y_1 + 5y_2 + y_3 \ge 5$	(1')
	$6y_1 + 3y_2 + 1.5y_3 \ge 4$	(2')
	$y_1, y_2 \ge 0$	(3')
	$y_3 \le 0$	(4')

Det er definert en dualvariabel for hver restriksjon i det opprinnelige problemet. Verdien på en gitt dualvariabel angir verdien av å øke rhs i den tilhørende restriksjonen med én enhet. Fortegnskravene i (3') kan tolkes slik at verdien av å øke ressurstilgangen alltid er positiv. En økning i rhs i restriksjonene (1) og (2) gir en økning i mulighetsområdet som iallfall ikke kan ha en negativ innvirkning på objektfunksjonen. Fortegnskravet i (4') blir motsatt: En økning i rhs på restriksjon gir et mindre mulighetsområdet som iallfall ikke kan ha positiv innvirkning på objektfunksjonsverdien.

I tilfeller hvor $m > n$, dvs. antall restriksjoner er større enn antall beslutningsvariable i primalen kan det være hensiktsmessig å løse dualproblemet istedet for primalen. Dette vil gi en mindre basismatrise i Simplex og kunne redusere antall regneoperasjoner.

d)
Dualen til dualen blir primalen eller vårt originale LP-problem. Det betyr at skyggeprisene i dualproblemet angir verdien på variablene i primalproblemet. Det betyr at optimal løsning blir $x_1^* = x_2^* = 5$ og $Z^* = c_B x_B = W^* = y^* b = 45$.

e)
Økning i proteintilgang betyr økning i rhs i (1). Dette tilsvarer en økning i objektfunksjonskoeffisienten til y_1 i dualproblemet. Fra sensitvitetsrapporten kan vi lese at denne har en "Allowable increase" på 30, det betyr at den kan øke til 80 uten at optimal basis endres. Økning i objektfunsjon: $\Delta Z = 30 * y_1^* = 30 * 0,27778 = 8,333$.

f) Innføring av nytt produkt
Innføring av nytt produkt tilsvarer det samme som å innføre en ny variabel i primalen. I dualen blir dette det samme som å innføre en ny restriksjon. Ny objektfunksjonskoeffisient til det nye produktet blir: $c_3 = 12,5 - 2*3 - 1*3 = 3,5$. Dersom den nye dualrestriksjonen er tilfredsstilt med den gamle løsningen betyr det at den fortsatt er optimal. Ny dualrestriksjon blir: $3y_1 + 3y_2 + 2y_3 \geq 3,5$. Setter inn verdiene på dualvariablene: $3*0,277778 + 3*0,777778 + 2*0 = 3,166667 < 3,5$. Det betyr at den opprinnelige løsningen er ikke dualt mulig, hvilket betyr at den heller ikke er optimal lenger, dvs. vi skal innføre det nye produktet. Redusert kostnad for den nye variabelen, x_3, blir 3,1666667 – 3,5 = - 0,333333.

Optimalt Simplextablå kan skrives på følgende måte, jfr. revidert Simplex:

$$\begin{bmatrix} 1 & yA\text{-}c & y & yb \\ 0 & B^{-1}A & B^{-1} & B^{-1}b \end{bmatrix}$$

Problemet her er at vi vet ikke B^{-1}, så vi må beregne denne ut fra kjente størrelser. Vi vet fra løsningen tidligere gitt, med x_1, x_2 og s_3 i basis, at $B = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 0 \\ 5 & 3 & 0 \\ 1 & \frac{3}{2} & -1 \end{bmatrix}$, så vi kan invertere denne for å finne B^{-1}. Dette gir $B^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{5}{18} & -\frac{2}{9} & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

Alternativ metode for å finne B^{-1} (dersom vi har glemt hvordan vi inverterer en matrise):
Ut fra det vi vet om løsningen fra det opprinnelige problemet, kan vi skrive opprinnelig optimalt Simplex-tablå som følger:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0.278 & 0.778 & 0 & 45 \\ 0 & 1 & 0 & b_{11} & b_{12} & b_{13} & 5 \\ 0 & 0 & 1 & b_{21} & b_{22} & b_{23} & 5 \\ 0 & 0 & 0 & b_{31} & b_{32} & b_{33} & 2.5 \end{bmatrix}$$

Her er $\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} = B^{-1}$. Vi vet allerede at $\begin{bmatrix} b_{13} \\ b_{23} \\ b_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$, siden s_3 (slakkvariabelen for restriksjon 3) er i basis. NB! Negativt fortegn i kolonnen fordi den representerer en overskuddsvariabel). Videre vet vi at $B^{-1}A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Dette kan vi benytte til å regne ut det vi mangler i B^{-1}. Dette gir følgende ligninger med løsninger:

$$4b_{11} + 5b_{12} = 1$$
$$6b_{11} + 3b_{12} = 0$$
$$\Rightarrow b_{11} = -\frac{1}{6}, b_{12} = \frac{1}{3}$$
$$4b_{21} + 5b_{22} = 0$$
$$6b_{21} + 3b_{22} = 1$$
$$\Rightarrow b_{21} = \frac{5}{18}, b_{22} = -\frac{2}{9}$$
$$4b_{31} + 5b_{32} - 1 = 0$$
$$6b_{21} + 3b_{22} - 1.5 = 0$$
$$\Rightarrow b_{31} = \frac{1}{4}, b_{32} = 0$$

Ny kolonne for x_3 i opprinnelig optimalt tablå blir nå: $B^{-1}A_3 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{5}{18} & -\frac{2}{9} & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} \\ -\frac{5}{4} \end{bmatrix}$

Da blir vårt Simplextablå som følger:

	Z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	Rhs
Z	1	0	0	-0.333	0.2778	0.7778	0	45

x_1	0	1	0	**1/2**	-1/6	1/3	0	5
x_2	0	0	1	1/6	5/18	-2/9	0	5
s_3	0	0	0	-5/4	1/4	0	1	2.5
Z	1	2/3	0	0	0.1667	1	0	48.333
x_3	0	2	0	1	-1/3	2/3	0	10
x_2	0	-1/3	1	0	0	0	0	10/3
s_3	0		0	0			1	15

Vi ser at x_3 må inn i basis og forholdstesten viser at x_1 skal ut. Ved å gjennomføre en Simplexiterasjon (som vist i tabellen over) får vi ny løsning som er optimal (fordi alle reduserte kostnader ≥ 0), med $x_2 = 10/3$ og $x_3 = 10$, og $Z^* = 48.333$.

g)
Innfører ny binærvariabel: $\delta = 1$ dersom vi velger å leie nytt utstyr, 0 ellers. Ny modell blir da:

$$\max Z = 5x_1 + 4x_2 - P\delta \qquad (0'')$$

når

$$4x_1 + 6x_2 \leq 50 \qquad (1)$$

$$5x_1 + 3x_2 \leq 40 \qquad (2)$$

$$x_1 + 1.5x_2 \geq 10(1-\delta) \qquad (3'')$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$\delta = \{0,1\}$$

Den opprinnelige modellen er endret med at det kommer inn et nytt kostnadsledd i (0’’) dersom vi leier nytt utstyr. Videre vil restriksjon (3’’) nå kun gjelde dersom vi ikke leier nytt utstyr, dvs. når $\delta = 0$. For $\delta = 1$ vil ikke (3’’) lenger være gjeldende.

Vi bør ikke leie inn nytt produksjonsutstyr ettersom restriksjon (3) ikke er bindende.

<u>Oppgave 4</u> (vekt 15 %)

- **Gitt i Eksamen i Mikroøkonomi og optimering 10. desember 2007**

Du blir leid inn som konsulent i bedriften Hermetikk-takk AS, som produserer mat på boks. Du får vite at hver boks skal romme 0,9 liter. Videre får du vite at produksjonskostnaden for boksene er lineært avhengig av arealet blikk som går med til å lage hermetikkboksen.

a) Formuler matematisk problemet med å finne dimensjonene for hermetikkboksen (radius og høyde) som minimerer produksjonskostnaden. Oppgi alle dimensjoner i centimeter.

b) Du observerer at bedriften produserer hermetikkboksene med en radius på 5,00 cm og en høyde på 11,46 cm. Er dette de optimale dimensjonene? Dersom ikke, hva er de optimale dimensjonene?

c) ISO standardiseringsprogram foreslår å øke standard boksstørrelse til 1,0 liter. Kostnaden per kvadratcentimeter blikk er 0,1 øre. *Estimer* kostnadsendringen per liter hermetikkmat uten å regne ut nye optimale dimensjoner på boksene.

<u>Løsning oppgave 4</u> (desember 2007)

a)
Kostnadene med å produsere hver blikkboks (formet som en sylinder) er proporsjonal med arealet av boksen som kan uttrykkes som følger: $A = 2\pi rh + 2\pi r^2$, hvor r er boksens radius og h høyden (det første leddet er sidekanten på sylinderen, mens det andre leddet er bunn+lokk). Volumet er gitt av: $V = \pi r^2 h$. Kravet er at V = 900 [cm^2]. Dersom du antar at avkappet ikke kan resirkuleres blir arealet som går med til en endeflate $(2r)^2$. Bortsett fra at π erstattes med 4 i endeflatearealet blir beregninga ellers den samme.

Da kan problemet formuleres som følger:

$$\min \quad A = 2\pi rh + 2\pi r^2 \qquad (0)$$

Når

$$\pi r^2 h = 900, \qquad (1)$$

$$r, h \geq 0 \qquad (2)$$

(0) Minimerer kostnad (areal)
(1) Krav til volum

b)
For å finne de optimale dimensjonene kan vi, siden vi har likhet i restriksjonen, benytte Lagrangemetoden. Danner følgende Lagrangefunksjon ved å flytte (1) inn i objektfunksjonen og multiplisere den med Lagrangemultiplikatoren λ:
$L(r,h,\lambda) = 2\pi rh + 2\pi r^2 - \lambda(\pi r^2 h - 900)$

1. ordensbetingelsene

(1) $\dfrac{\partial L}{\partial r} = 2\pi(h + 2r - \lambda rh) = 0 \Rightarrow h + 2r - \lambda rh = 0$

(2) $\dfrac{\partial L}{\partial h} = 2\pi r - \lambda\pi r^2 = 0 \Rightarrow \pi r(2 - \lambda r) = 0$
$\Rightarrow r \neq 0 \Rightarrow \lambda r = 2$

$(2) \to (1) \Rightarrow h + 2r - 2h = 0 \Rightarrow r = \dfrac{1}{2}h$

(3) $\dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = \pi r^2 h - 900 = 0 \Rightarrow \dfrac{\pi}{4}h^3 = 900 \Rightarrow h = 10{,}4645$

$\Rightarrow r = 5{,}2322 \Rightarrow \lambda = \dfrac{2}{r} = 0{,}3822$

De optimale dimensjonene er en radius på 5,23 cm og høyde på 10,46 cm (gir $A = 516{,}02$).
De opprinnelige dimensjonene er følgelig ikke optimale.

c) Nytt krav: $\pi r^2 h = 1000$

Fra b) ser vi at Lagrangemultiplikatoren $\lambda = 0,3822$, dvs. at for hver enhet økning i høyresiden, får vi en økning i objektfunksjonen (arealet) på 0,3822 cm^2. Ved en økning i kravet til volum på 100 cm^3, får vi derfor en estimert økning i arealet på 38,22 cm^2, dvs. nytt areal blir omlag $A = 516,02 + 38,22 = 554,24$. Ny kostnad per blikkboks og per liter mat blir 0,1*554,24=55,4 øre. Tidligere kostnad per liter mat var $0,1 * 516,02 / 0,9 = 57,3$. Det betyr at vi har en reduksjon på 1,9 øre per liter mat.

PS! Dette blir bare et estimat, siden verdien for λ kun er gyldig for V=900, og vil endre seg litt når volumet endrer seg.

<u>Sjekk:</u>

$$(3') \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda} = \pi r^2 h - 1000 = 0 \Rightarrow \frac{\pi}{4} h^3 = 1000 \Rightarrow h = 10,8385$$

$$\Rightarrow r = 5,4193 \Rightarrow \lambda = \frac{2}{r} = 0,3691$$

$$\Rightarrow A = 2\pi r h + 2\pi r^2 = 553,585$$

Det betyr at estimatet vårt for nytt areal basert på verdien for λ i b) var rimelig bra, kun et avvik på 0,655. Ny pris per blikkboks blir da tilnærmet likt som vist over.

<u>Oppgave 2</u> (vekt 23%)

- **Gitt i Eksamen i Mikroøkonomi og optimering 15. desember 2006**

Bedriften Burvika Båtbyggeri ASA produserer trebåter i to forskjellige utførelser. *Snekka* er enkel, mens *Skøyta* er større med kostbart utstyr. Bedriften skal planlegge produksjonen for neste periode. **Se bort fra eventuelle krav om heltallig produksjonskvanta i denne oppgaven. (Vi kan gjøre dette ettersom påbegynte trebåter ferdigstilles i den derpå følgende periode).**

Hver enhet av Snekka krever 2 månedsverk og 1 enhet råtømmer. For hver enhet av Skøyta kreves det 3 månedsverk og 3 enheter med råtømmer. I den neste perioden har bedriften 24 månedsverk og 18 enheter råtømmer tilgjengelig. Det er ingen begrensninger på andre innsatsfaktorer.

All produksjon selges på kontrakt til et selskap. Bedriften kan selv bestemme hvilke trebåter den leverer, men for å tilfredsstille kontraktens leveransekrav på lang sikt, må bedriften produsere til sammen minst 11 trebåter i neste periode.

Også prisene er kontraktsfestet. Per enhet får Burvika Båtbyggeri 70 000 kr for Snekka og 130 000 kr for Skøyta. Bedriftens kostnader er 21 000 kr per månedsverk og 9 000 kr per enhet råtømmer. Øvrige kostnader per trebåt er lik 9 000 kr for Snekka og 20 000 kr for Skøyta. Bedriften ønsker å maksimere profitten.

a) Formuler planleggingsproblemet med tallene oppgitt i oppgaveteksten.

Nedenfor gis optimalt tablå. x_1 og x_2 refererer til antall enheter av henholdsvis Snekka og Skøyta. s_1, s_2 og s_3 er slakk/overskudds variable. Eventuelle kunstvariable er utelatt.

Basisvar	Eq.	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	RHS
z	(0)	1	0	0	10	0	10	130
x_1	(1)	0	1	0	-1	0	-3	9
x_2	(2)	0	0	1	1	0	2	2
s_2	(3)	0	0	0	-2	1	-3	3

b) Excel filer knyttet til problemet finnes i vedlegg A. Fyll ut de 7 manglende tallene på plassene merket ?? direkte i sensitivitetsrapporten i vedlegg A.2. Hele vedlegg A skal legges ved besvarelsen. Begrunn svaret.

Bedriften kan utvide tilgangen på arbeidskraft med inntil 2 månedsverk til gjeldende pris 21 000 kr per månedsverk. Brukes denne muligheten, vil det uansett hvor mye som benyttes, påløpe en ekstrakostnad (fast sum) lik 8 000 kr.

c) Reformuler bedriftens planleggingsproblem fra a) slik at det tas hensyn til mulighetene og kostnadene for økt tilgang på arbeidskraft.

d) Endre Excel fil A.1 i vedlegg A, som skal legges ved besvarelsen, til å inkludere den reformulerte formuleringen og oppgi ”solver innhold” i A.3.

e) Vil bedriften gjøre bruk av økt tilgang på arbeidskraft?

Vedlegg A

Studentnummer:

Vedlegg A.1

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	**Norship**							
2								
3	Produkter		Snekker	Skøyter				
4								Ressurs
5	Begrensninger					Total		Tilgjengelig
6	Arbeidskraft		2	3		24	≤	24
7	Råtømmer		1	3		15	≤	18
8	Leveringskrav		1	1		11	>=	11
9								
10	Profitt per enhet		10	20		130		
11	Løsning		9	2				

Kommentarer til noen av cellene:
F6=C6*C11+D6*D11
F7=C7*C11+D7*D11
F8=C8*C11+D8*D11
F10=SUMPRODUCT(C10:D10;C11:D11)

Vedlegg A.2

Microsoft Excel 11.0 Sensitivity Report

Adjustable Cells

Cell	Name	Final Value	Reduced Cost	Objective Coefficient	Allowable Increase	Allowable Decrease
$C$11	Løsning Snekker	9	??	10	??	1E+30
$D$11	Løsning Skøyter	2	??	20	1E+30	5

Constraints

Cell	Name	Final Value	Shadow Price	Constraint R.H. Side	Allowable Increase	Allowable Decrease
$F$6	Arbeidskraft Total	24	??	24	1,5	2
$F$7	Råtømmer Total	15	??	18	1E+30	3
$F$8	Leveringskrav Total	11	??	11	1	??

Vedlegg A.3

Solver innhold:

Set Target Cell: $F$10
Equal to: Max
By Changing Cells: $C$11:$D$11
Subject to the constraints:
$F$6 <= $H$6
$F$7 <= $H$7
$F$8 >= $H$8
$C$11:$D$11>=0

Løsning oppgave 2 (desember 2006)
- I oppgave b) står det også noen alternative løsningsmetoder som ikke er pensum

a)
Alle kostnader og inntekter gis i 1000 kr.

Inntekt: $R(x_1, x_2) = 70x_1 + 130x_2$
Kostnader for månedsverk: $C_M(x_1, x_2) = 21 \cdot 2x_1 + 21 \cdot 3x_2 = 42x_1 + 63x_2$
Produksjonskostnader: $C_P(x_1, x_2) = 9 \cdot 1x_1 + 9 \cdot 3x_2 = 9x_1 + 27x_2$
Øvrige kostnader: $C_Ø(x_1, x_2) = 9x_1 + 20x_2$
Profitt: $P(x_1, x_2) = R(x_1, x_2) - C_M(x_1, x_2) - C_P(x_1, x_2) - C_Ø(x_1, x_2) = 10x_1 + 20x_2$

$$\max \quad z = 10x_1 + 20x_2, \qquad (0)$$

Når

$$2x_1 + 3x_2 \le 24, \qquad (1)$$

$$x_1 + 3x_2 \le 18, \qquad (2)$$

$$x_1 + x_2 \ge 11 \qquad (3)$$

$$x_1 \ge 0, \qquad (4)$$

$$x_2 \ge 0, \qquad (5)$$

(0)	Maksimerer profitten ved å produsere snekker og skøyter
(1)	Arbeidskraftsbegrensning
(2)	Råvarebegrensing
(3)	Minimum leveransekrav
(4)-(5)	Ikke negativitets-krav til variablene

b)
De reduserte kostnadene finnes i Eq. (0) i kolonne for x_1 og x_2. Begge disse to variablene er i basis i optimalt tablå, og de tilhørende reduserte kostnadene må da være $\boxed{0}$.

Skyggeprisene finner vi i Eq. (0) i kolonne for s_1, s_2 og s_3. s_1 og s_2 representerer slakkvariable i restriksjon (1) og (2), mens s_3 representerer overskuddsvariabel i restriksjon (3). Det betyr at skyggeprisen for restriksjon (3) finnes ved å multiplisere tallet i Eq. (0) og kolonne s_3 med -1. Vi får derfor følgende skyggepriser: $\boxed{y_1 = 10,\ y_2 = 0 \text{ og } y_3 = -10}$.

Sensitivitetsområde for b_3

Vi endrer b_3 med Δb_3. Kravet er at vi fortsatt skal ha de samme variablene i basis og variablene kan kun ta ikke-negative verdier.

$$\mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{B}^{-1}\begin{bmatrix}0\\0\\\Delta b_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}9\\2\\3\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-1 & 0 & 3\\1 & 0 & -2\\-2 & 1 & 3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0\\0\\\Delta b_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}9+3\Delta b_3\\2-2\Delta b_3\\3+3\Delta b_3\end{bmatrix} \geq \mathbf{0}$$

$$\Rightarrow \boxed{-1 \leq \Delta b_3 \leq 1}$$

Tallet i Excelrapporten er <u>1</u>.

<u>Sensitivitetsområde for c_1</u>

Vi endrer c_1 med Δc_1. Kravet er at vi fortsatt skal ha samme optimale løsning. Det betyr at de reduserte kostnadene skal være 0 for variable i basis og positive for variable utenfor basis.

Løsningsalternativ 1:
Ved bruk av tablå

Basisvar	Eq.	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	RHS
Z	(0)	1	0- Δc_1	0	10	0	10	130
x_1	(1)	0	1	0	-1	0	-3	9
x_2	(2)	0	0	1	1	0	2	2
s_2	(3)	0	0	0	-2	1	-3	3
Z	(0)	1	0	0	10- Δc_1	0	10-3 Δc_1	130+9 Δc_1
x_1	(1)	0	1	0	-1	0	-3	
x_2	(2)	0	0	1	1	0	2	
s_2	(3)	0	0	0	-2	1	-3	

$10 - \Delta c_1 \geq 0$ og $10 - 3\Delta c_1 \geq 0$

$$\Rightarrow \Delta c_1 \leq \frac{10}{3} = 3.33 \;\Rightarrow\; \boxed{-\infty \leq \Delta c_1 \leq 3.33}$$

Tallet i Excelrapporten er <u>3.33.</u>

Løsningsalternativ 2:
Ved bruk av revidert simplex

Redusert kostnad:

$$\begin{bmatrix}\overline{c_{s1}} & \overline{c_{s2}} & \overline{c_{s3}}\end{bmatrix} = \mathbf{C_B B^{-1}}\begin{bmatrix}\mathbf{P}_{s1} & \mathbf{P}_{s2} & \mathbf{P}_{s3}\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}c_{s1} & c_{s2} & c_{s3}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}10+\Delta c_1 & 20 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 0 & 3\\1 & 0 & -2\\-2 & 1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & -1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \Delta c_1 \leq \frac{10}{3} = 3.33$$

Løsningsalternativ 3:
Grafisk løsning

Vi ønsker å beholde samme optimale løsning. Dette får vi inntil målfunksjonen blir parallell med restriksjonen (1). Da er stigningstallet lik.

$$z = (10 + \Delta c_1)x_1 + 20x_2 \Rightarrow x_2 = \frac{z - (10 + \Delta c_1)x_1}{20} \qquad \text{(a)}$$

$$(1) \Rightarrow 2x_1 + 3x_2 = 24 \Rightarrow x_2 = \frac{24 - 2x_1}{3} \qquad \text{(b)}$$

$$\text{(a)} = \text{(b)} \Rightarrow \frac{-(10 + \Delta c_1)}{20} = -\frac{2}{3} \Rightarrow \Delta c_1 = \frac{10}{3}$$

c) Utvidelse av lineærprogrammeringsproblemet:
Vi trenger:
$\delta = 1$ hvis en gjør bruk av økt tilgang på arbeidskraft/ = 0 ellers

$$\max \quad z = 10x_1 + 20x_2 - 8\delta, \qquad (0')$$

Når

$$2x_1 + 3_2 - 2\delta \le 24, \qquad (1')$$

$$x_1 + 3x_2 \le 18, \qquad (2)$$

$$x_1 + x_2 \ge 11 \qquad (3)$$

$$x_1 \ge 0, \qquad (4)$$

$$x_2 \ge 0, \qquad (5)$$

$$\delta \in \{0,1\} \qquad (6)$$

(0’) – Ny målfunksjon hvor en tar hensyn til kostnadene ved økt tilgang på arbeidskraft

(1’) – Arbeidskraftbegrensning hvor tilgangen øker med 2 månedsverk, hvis en velger å utvide tilgangen mot en kostnad.

(11) Binæritetskrav til variabelen som beskriver om en velger økt tilgang på arbeidskraft.

d)

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	**Norship**							
2								
3	Produkter		Snekker	Skøyter	delta			

4								Ressurs
5	Begrensninger					Total		Tilgjengelig
6	Arbeidskraft		2	3	-2	24	≤	24
7	Råtømmer		1	3		15	≤	18
8	Leveringskrav		1	1		11	>=	11
9								
10	Profitt per enhet		10	20	-8	130		
11	Løsning		9	2				

Kommentarer til noen av cellene:
F6=C6*C11+D6*D11**+E6*E11**
F7=C7*C11+D7*D11
F8=C8*C11+D8*D11
F10=SUMPRODUCT(C10:**E10**;C11:**E11**)

Set Target Cell: $F$10
Equal to: Max
By Changing Cells: $C$11:**$E$11**
Subject to the constraints:
$F$6 <= $H$6
$F$7 <= $H$7
$F$8 >= $H$8
$C$11:$D$11>=0
$E$11=binary

e)
Skyggeprisen for arbeidskraftsrestriksjonen fant vi i b) til å være 10. Den er gyldig for økning inntil 1.5. Det betyr at en er villig til å betale opptil 10 000 kr for et månedsverk ekstra. Her er ekstrakostnaden 8 000 kr for to månedsverk. Bedriften vil klart gjøre bruk av økt tilgang på arbeidskraft.

<u>Oppgave 3</u> (vekt 20 %)

- **Gitt i Eksamen i Mikroøkonomi og optimering 15. desember 2006**

Bedriften NorPipe ASA produserer og selger *rør* og *koplingsdeler*.

Det er høye håndteringskostnader knyttet til transport og lagring av de to produkttypene og disse kostnadene øker kvadratisk med kvantum ferdig vare på følgende måte:

$$C_{TL}(x_1, x_2) = 1800x_1 + x_1^2 + 450x_2 + 0.01x_2^2 \quad \text{[i kr]}$$

Hvor x_1 er antall kg ferdige rør og x_2 angir antall kg ferdige koplingsdeler. Kostnads-funksjonen $C_{TL}(x_1, x_2)$ inneholder alle relevante kostnader for planleggingsproblemet bortsett fra produksjonskostnadene.

Produksjonskostnadene utgjør for ferdigvare kroner 200 per kg *rør* og kroner 850 per kg *koplingsdeler.*

Lagerkapasiteten for planleggingsperioden er begrenset. Rør er mer plasskrevende enn koplingsdeler. Et kg rør krever like mye lagerkapasitet som 5 kg koplingsdeler. Lageret kan maksimalt lagre 10 000 kg koplingsdeler eller 2 000 kg rør i en planleggingsperiode, eventuelt en kombinasjon (som for eksempel 5 000 kg koplingsdeler og 1 000 kg rør).

I tillegg er produksjonskapasitet på rør begrenset til 1 200 kg innenfor planleggingsperioden.

Alle leveranser skjer på slutten av planleggingsperioden.

Bedriften ønsker å maksimere sin profitt for planleggingsperioden. Rør selges for 6 000 kr per kg, mens koplingsdeler selges for 1 600 kr per kg.

a) Formuler bedriftens produksjonsplanleggingsproblem for planleggings-perioden med tallene oppgitt i oppgaven.

b) Sjekk hvert av følgende utsagn og finn ut hvilket utsagn som er korrekt:

1) Ingen av de to restriksjonene er effektive
2) Kun den første restriksjonen er effektiv
3) Kun den andre restriksjonen er effektiv
4) Begge restriksjonene er effektive

c) Bedriften kan leie ekstra lagerkapasitet og ekstra produksjonskapasitet. Hvor mye er bedriften villig til å betale i leie?

Løsning oppgave 3 (desember 2006)

a)
Håndteringskostnader (transport og lager): $C_{TL}(x_1, x_2) = 1800x_1 + x_1^2 + 450x_2 + 0.01x_2^2$
Produksjonskostnader: $C_P(x_1, x_2) = 200x_1 + 850x_2$
Inntekt: $R(x_1, x_2) = 6000x_1 + 1600x_2$
Profitt:

$$\max \quad z = 4000x_1 - x_1^2 + 300x_2 - 0.01x_2^2, \quad (0)$$

Når

$$5x_1 + x_2 \leq 10000, \quad (1)$$

$$x_1 \leq 1200, \quad (2)$$

$$x_1 \geq 0, \quad (3)$$

$$x_2 \geq 0, \quad (4)$$

(0)	Maksimerer profitten ved å produsere rør og koplingsdeler
(1)	Lagerkapasitetsrestriksjon
(2)	Produksjonskapasitetsrestriksjon
(3)-(4)	Ikke negativitets-krav til variablene

b) Vi tar de ulike utsagnene og vurderer dem separat

b1) Ingen av de to restriksjonene er effektive

Vi finner optimalt kvantum av rør og koplingsdeler ved å maksimere målfunksjonen.

1.ordensbetingelsene

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} = 4000 - 2x_1 = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} = 300 - 0.02x_2 = 0$$

$\Rightarrow x_1 = 2000$ og $x_2 = 15000$
Restriksjonene (1) og (2) brytes, hvis en produserer i henhold til å maksimere målfunksjonen.
Utsagnet er ikke riktig.

b2) Kun den første restriksjonen er effektiv

Vi finner optimalt kvantum for variablene ved Lagrange multiplikatormetoden når vi har kun restriksjon (1).

Lagrangefunksjonen:

$$L(x_1, x_2, \lambda) = 4000x_1 - x_1^2 + 300x_2 - 0.01x_2^2 - \lambda(5x_1 + x_2 - 10000)$$

1.ordensbetingelsene

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 4000 - 2x_1 - 5\lambda = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 300 - 0.02x_2 - \lambda = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 5x_1 + x_2 - 10000 = 0$$

$\Rightarrow \lambda = 240,\ x_1 = 1400$ og $x_2 = 4000$

Vi ser at $x_1 = 1400$ bryter restriksjon (2). Utsagn 2 er ikke riktig.

b3) <u>Kun den andre restriksjonen er effektiv</u>

Hvis (2) er effektiv, har vi $x_1 = 1200$. Siden restriksjon (1) ikke skal være effektiv, må vi ha at $x_2 < 4000$. I forhold til b1) med $x_2 = 15000$, vil heller ikke dette utsagnet være riktig.

b4) <u>Begge restriksjonene er effektive</u>

Hvis (2) er effektiv, har vi $x_1 = 1200$. Hvis (1) også er effektiv, vil $x_2 = 4000$ hvis $x_1 = 1200$. Utsagnet er korrekt. Dette vises også med Lagrange multiplikatormetoden i c).

c)
Lagrangemultiplikatoren uttrykker økning i målfunksjonen ved en marginal økning i restriksjonens høyreside. For å finne hva bedriften er villig til å betale må en finne multiplikatoren for begge restriksjonene. Vi vet at begge restriksjonene er effektive og kan anta = i restriksjonene.

Lagrangefunksjonen:

$$L(x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2) = 4000x_1 - x_1^2 + 300x_2 - 0.01x_2^2 - \lambda_1(5x_1 + x_2 - 10000) - \lambda_2(x_1 - 1200)$$

1.ordensbetingelsene

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 4000 - 2x_1 - 5\lambda_1 - \lambda_2 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 300 - 0.02x_2 - \lambda_1 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = 5x_1 + x_2 - 10000 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = x_1 - 1200 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 220,\ \lambda_2 = 500,\ x_1 = 1200 \text{ og } x_2 = 4000$$

Hvis kapasiteten på lager økes med en enhet vil målfunksjonen øke med 220. Maksimalt vil derfor bedriften betale 220 kr per ekstra lagerenhet. Tilsvarende vil bedriften maksimalt betale 500 kr i leie for en enhet produksjonskapasitet.

<u>Oppgave 1</u> (vekt 40%) Produksjonsplanlegging for smelteverket Mersil

- **Gitt i Eksamen i Mikroøkonomi og optimering 20. desember 2005**
- **Oppgavene d), f) og g) er ikke relevante, da de baserer seg på revidert simplex og/eller dualitetsteori**

Smelteverket Mersil produserer ferrosilisium og silisium på 3 ovner; ovn 1, ovn 3 og ovn 6. Det har vært nødvendig for verket å fokusere på å redusere kostnader den siste tiden grunnet trusler om nedleggelse. Som konsulent er du bedt om å bistå i planleggingen av drift på en av deres ovner; ovn 6. I det underliggende planleggingsproblemet, må du ta hensyn til følgende forhold:

1) Hver uke må en fra ovn 6 produsere minst 1 000 tonn med produkter (ferrosilisium og/eller silisium) for å dekke total etterspørsel fra verket.
2) Fra smeltebadet i ovnene kommer det røyk. Denne røyken omformes til produktet mikrosilica. Også dette produktet er det knyttet en etterspørsel til. Hver uke må en fra ovn 6 produsere minst 800 tonn microsilica. En får ut 100 tonn microsilica per 1 000 tonn ferrosilisium produsert og 400 tonn microsilica per 1 000 tonn silisium produsert.
3) For å sikre god kvalitet på produktene har en kommet fram til et krav om å bruke minst 6 energienheter på ovn 6. Det går med 3 energienheter for å produsere 1 000 tonn ferrosilisium og 2 energienheter for å produsere 1 000 tonn silisium.
4) Hver uke har ovn 6 en mulig tilgang på råvarer som tilsvarer 1 500 tonn ferdig ferrosilisium.
5) Hver uke har ovn 6 en mulig tilgang på råvarer som tilsvarer 3 000 tonn ferdig silisium.

De totale kostnadene for å produsere 1 000 tonn ferrosilisium er 2 (i 10 000 kr) og for 1 000 tonn silisium er 3 (i 10 000 kr). Mersil ønsker å minimere kostnadene.

e) Sett opp en lineær programmeringsmodell for planleggingsproblemet med tallene oppgitt i oppgaven. Anbefaling: Skaler dataene slik at de ligger i området [1,9]. Oppgi produsert kvantum i 1 000 tonn.

f) Vis mulighetsområdet grafisk og finn optimal løsning grafisk.

g) Hvis du hadde løst planleggingsproblemet formulert i a) med simplex algoritmen i tablåer ville du trengt 2, 3 eller 4 tablåer totalt (inklusiv starttablå og optimalt tablå) for å finne optimal løsning. Hvilket av alternativene er korrekt; Alternativ 1) 2 tablåer, Alternativ 2) 3 tablåer, Alternativ 3) 4 tablåer? Begrunn kort svaret.

Sensitivitetsrapporten gitt av Excel ser ut som følger:

Adjustable Cells

Cell	Name	Final Value	Reduced Cost	Objective Coefficient	Allowable Increase	Allowable Decrease
$C$15	Løsning Variabel 1	0,8	0	2	1E+30	1,25
$D$15	Løsning Variabel 2	1,8	0	3	5	1E+30

Constraints

Cell	Name	Final Value	Shadow Price	Constraint R.H. Side	Allowable Increase	Allowable Decrease
$E$6	Restriksjon 1 Total	2,6	0	1	1,6	1E+30
$E$8	Restriksjon 3 Total	6	0,5	6	1,75	5,333333333
$E$7	Restriksjon 2 Total	8	0,5	8	4	3,5
$E$9	Restriksjon 4 Total	0,8	0	1,5	1E+30	0,7
$E$10	Restriksjon 5 Total	1,8	0	3	1E+30	1,2

h) Mersil vurderer å levere en ny kvalitet silisium, *nysilisium*, for å ytterligere redusere kostnadene. Fortsatt skal det totale kvantumet produsert hver uke være minst 1 000 tonn på ovn 6. En får 200 tonn microsilica per 1 000 tonn nysilisium produsert på ovn 6. Tilslutt går det med 2 energienheter for å produsere 1 000 tonn nysilisium. Mersil har estimert kostnadene til 2 (i 10 000 kr) per 1 000 tonn nysilisium produsert. Det er ikke begrensninger på mulig tilgang av råvarer for å produsere nysilisium som vi har for ferrosilisium og silisium i 4) og 5). Vil Mersil utvide sitt produktsortiment?

i) Nedenfor har vi gitt starttablå for deler av problemet fra a) og d). Hvilke restriksjoner er tatt bort av 1), 2), 3), 4), og 5)?

Basisvar	Eq.	z	x_1	x_2	X_3	s_1	A_1	s_2	A_2	RHS
z	(0)	-1	-4M+2	-6M+3	-4M+2	M	0	M	0	-14M
A_1	(1)	0	1	4	2	-1	1	0	0	8
A_2	(2)	0	3	2	2	0	0	-1	1	6

j) Det optimale simplextablå ser ut som følger:

Basisvar	Eq.	z	x_1	x_2	x_3	s_1	A_1	s_2	A_2	RHS
z	(0)	-1				0,5	M-0,5	0,5	M-0,5	-7
x_2	(1)	0				-0,3	0,3	0,1	-0,1	
x_1	(2)	0				0,2	-0,2	-0,4	0,4	

Her mangler det en del tall. Bruk teorien fra revidert simplex (fundamental insight gitt i kapittel 5.3) til å fullføre tablået. Vis beregningene du gjør for å komme fram til tallene.

k) Finnes det alternative løsninger til den optimale løsningen funnet i f)? Begrunn kort svaret.

l) Omformuler lineær programmeringsproblemet vist i tablået i oppgave e) på en enklest mulig måte for å ta hensyn til følgende opplysninger:

Det viser seg at kostnadsfunksjonen oppgitt i d) for å produsere nysilisium var feilestimert. Den korrekte kostnadsfunksjonen består av driftsbetingede faste kostnader og variable kostnader. Hvis en starter å produsere nysilisium må en regne med en fast kostnad per uke tilsvarende 2 (i 10 000 kr). I tillegg har en variable kostnader som er lik 1 (i 10 000 kr) per 1 000 tonn nysilisium produsert. Vi har i tillegg følgende krav: Hvis det produseres nysilisium i en uke på ovn 6 må det produseres minst 500 tonn ferrosilisium denne uken på ovn 6. Det er ikke oppgitt noe minste produksjonskvantum for nysilisium.

<u>Løsning oppgave 1</u> (desember 2005)

a) Lineærprogrammeringsmodellen med tallene oppgitt i oppgaven:

Variable: x_1 = mengde ferrosilisium produsert i løpet av en uke [i 1 000 tonn]

x_2 = mengde silisium produsert i løpet av en uke [i 1 000 tonn]

z = Objektfunksjonsverdien, kostnader [i 10 000 kr]

$$\min \quad z = 2x_1 + 3x_2 , \qquad (0)$$

Når

$$x_1 + x_2 \geq 1 , \qquad (1)$$

$$x_1 + 4x_2 \geq 8 , \qquad (2)$$

$$3x_1 + 2x_2 \geq 6 , \qquad (3)$$

$$x_1 \leq 1{,}5 , \qquad (4)$$

$$x_2 \leq 3 , \qquad (5)$$

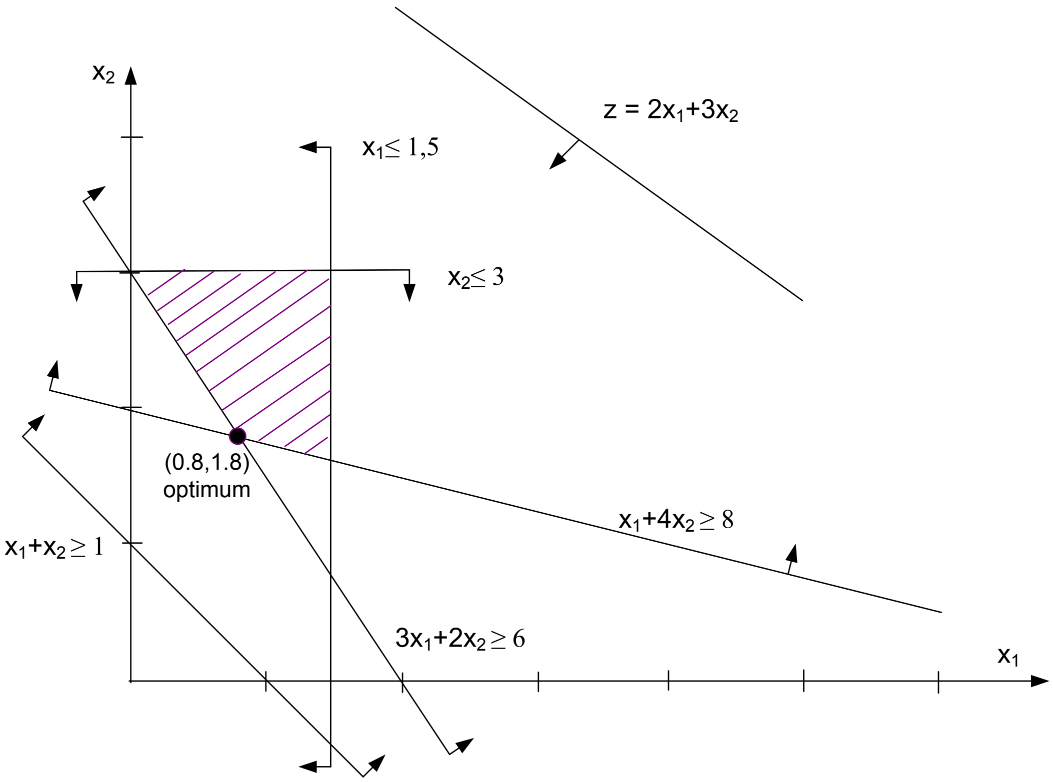
$$x_1 \geq 0 , \qquad (6)$$

$$x_2 \geq 0 , \qquad (7)$$

(0) Minimerer kostnadene ved å produsere ferrosilisium og silisium
(1)-(5) Korresponderer til forhold 1) til 5) oppgitt i oppgaveteksten
(6)-(7) Ikke negativitets-krav til variablene

Kommentar: Nedre grense på energibruk er søkt. Det er valgt mht resten av spørsmålene.

b) Mulighetsområdet grafisk er skissert i figuren under.



Optimal løsning finnes ved å parallellforskyve kostnadsfunksjonen z til vi finner minimalt punkt i mulighetsområdet. Det er punktet $x_1 = 0{,}8$ og $x_2 = 1{,}8$ og z=7.

Kommentar: for å få et nøyaktig tall, kan en løse 2 likninger i 2 ukjente. Det kan virke søkt at nedre produksjonsgrense ($x_1 + x_2 \geq 1$) er redundant, uavhengig av målfunksjon. Det er valgt mht resten av spørsmålene.

c) Antall tablåer som trengs for å nå optimal løsning:

Starttablå vil inneholde en basis bestående av:
Kunstvariabel i restriksjon (1)
Kunstvariabel i restriksjon (2)
Kunstvariabel i restriksjon (3)
Slakkvariabel i restriksjon (4)
Slakkvariabel i restriksjon (5)

En variabel går inn i basis og ut av basis i hvert tåblå.

I tablå 1 har vi 3 kunstvariable i basis
I tablå 2 har vi minst 2 kunstvariable i basis
I tablå 3 har vi minst 1 kunstvariabel i basis
I tablå 4 trenger vi ikke å ha noen kunstvariable i basis.

Dette betyr at vi trenger minst 4 tablåer. Alternativ 3) er riktig.

d) Utvidelse av produktsortiment?

Ut fra sensitivitetsanalysen leser vi at dualvariablene for restriksjon (1), (2) og (3) har verdiene $y_1 = 0,\ y_2 = 0{,}5 \text{ og } y_3 = 0{,}5$.

Hvis vi innfører nysilisium vil dette korrespondere til følgende dualrestriksjon i dualproblemet:

$$y_1 + 2y_2 + 2y_3 \le 2$$

Med tall fra sensitivitetsanalysen blir dette
$0 + 2 \bullet 0{,}5 + 2 \bullet 0{,}5 = 2 \le 2$

Dualrestriksjonen brytes ikke. Vi vil ha samme optimale dualløsning. Det betyr at vi vil ha samme optimale primalløsning, og <u>Mersil forbedrer ikke sin situasjon ved å starte produksjon av nysilisium</u>. Det finnes imidlertid en alternativ optimal løsning med nysilisium i produktsortimentet.

e) Restriksjonene (1), (4) og (5) er tatt bort. Ikke negativitetskravene framkommer aldri i simplextablåene.

f) Fullføring av tablå:

A_1 og A_2 er i basis i starttablå: $\mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 0{,}3 & -0{,}1 \\ -0{,}2 & 0{,}4 \end{bmatrix}$

$$\left[\mathbf{a}_1^{opt}\mathbf{a}_2^{opt}\mathbf{a}_3^{opt}\mathbf{b}_3^{opt}\right] = \mathbf{B}^{-1}\left[\mathbf{a}_1^{start}\mathbf{a}_2^{start}\mathbf{a}_3^{start}\mathbf{b}_3^{start}\right] = \begin{bmatrix} 0{,}3 & -0{,}1 \\ -0{,}2 & 0{,}4 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 8 \\ 3 & 2 & 2 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0{,}4 & 1{,}8 \\ 1 & 0 & 0{,}4 & 0{,}8 \end{bmatrix}$$

De reduserte kostnadene blir:

$$\left[\overline{c}_1^{opt}\ \overline{c}_2^{opt}\ \overline{c}_3^{opt}\right] = \left[\overline{c}_1^{start}\ \overline{c}_2^{start}\ \overline{c}_3^{start}\right] - c_B\mathbf{B}^{-1}\left[\mathbf{a}_1^{start}\ \mathbf{a}_2^{start}\ \mathbf{a}_3^{start}\right]$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 2 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 0{,}3 & -0{,}1 \\ -0{,}2 & 0{,}4 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Det er mulig å sjekke resultatet ved at en vet fra tidligere delspørsmål at x_1 og x_2 er i basis i siste tablå med $x_1 = 0{,}8$ og $x_2 = 1{,}8$. De reduserte kostnadene er 0 for variable i basis. Videre fant en at redusert kostnad for $x_3 = 0$ fra d).

Basisvar	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3	s_1	A_1	s_2	A_2	RHS
z	(0)	-1	0	0	0	0,5	M-0,5	0,5	M-0,5	-7
x_2	(1)	0	0	1	0,4	-0,3	0,3	0,1	-0,1	1,8
x_1	(2)	0	1	0	0,4	0,2	-0,2	-0,4	0,4	0,8

g) Vi har her et minimumsproblem med $\ge$-restriksjoner. Alle koeffisientene er positive. Det finnes derfor uendelig mange andre løsninger som er dårligere enn den optimale løsningen vi har funnet. Det finnes også en alternativ optimal løsning med x_3 i basis siden den reduserte kostnaden her er 0. x_1 eller x_2 går da ut av basis.

h) Utvidelse av lineærprogrammeringsproblemet:

Vi trenger:
x_3 = mengde nysilisium produsert i løpet av en uke [i 1 000 tonn]
$\delta = 1$ hvis x_3 blir produsert/= 0 ellers
BIGM = max produksjon av nysilisium. Ut fra (2'), (3') og (9) finner vi at dette er BIG*M*= 2.25. Hvis en produserer nysilisium, må en ha x_1 til minst å være 0,5. Med $x_1 = 0{,}5$ og $x_2 = 0$ vil x_3 måtte være minst 3,75 ut fra (2'). De samme beregninger for (3') gir en lavere krav til x_3. En vil aldri produsere mer enn det minste kravet ut fra restriksjonene, siden en her minimerer målfunksjonen.

$$\min \quad z = 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2\delta, \qquad (0')$$

Når

$$x_1 + 4x_2 + 2x_3 \geq 8, \qquad (2')$$

$$3x_1 + 2x_2 + 2x_3 \geq 6, \qquad (3')$$

$$x_3\text{-}3{,}75\delta \leq 0, \qquad (8)$$

$$x_1 - 0{,}5\delta \geq 0, \qquad (9)$$

$$x_1 \geq 0, \qquad (6)$$

$$x_2 \geq 0, \qquad (7)$$

$$x_3 \geq 0 \qquad (10)$$

$$\delta \in \{0,1\} \qquad (11)$$

(0') – Ny målfunksjon

(2')-(3') – revidert restriksjoner (2) og (3) hvor nysilisium er inkludert

(8) – Hvis nysilisium produseres er den øvre grensen 3 750 tonn

(9) – Hvis nysisliium produseres må en produsere minst 500 tonn ferrosilium

(6), (7) og (10) Ikke negativitetskrav til produksjonsmengde variablene

(11) Binæritetskrav til variabelen som beskriver som en produserer nysilisium eller ikke.

<u>Exercise 2</u> (30 %): Production planning in MicroCorp
- **Gitt i Eksamen i Operasjonsanalyse 29. november 2007**

The well known company MicroCorp produces three different types of soft products, Small, Medium and Xel. For each product it sells on the market the company makes a certain profit. Since its products are not very sophisticated only two resources are needed for production.

The production planning problem of the company can be written as follows:

$$
\begin{aligned}
& Max\ z = 5x_1 + 3x_2 + x_3 \\
& s.t. \\
& \quad x_1 + \quad x_2 + \ 3x_3 \quad \leq 6 \\
& 5x_1 + 3x_2 + \ 6x_3 \quad \leq 15 \\
& x_1, x_2, x_3 \qquad\qquad \geq 0
\end{aligned}
$$

a) Solve the given LP-problem to optimality with the Simplex method. Carry out **at least** two iterations (initial tableau plus two iterations).
Why is your solution optimal?
Hint: You should reach optimality in less than 5 iterations.

b) Is there anything special about your solution?

c) While the production department is completely satisfied with your solution, the sales department is not sure if your proposal is wise from a marketing point of view. Can you suggest any other solutions the marketing department could choose from?

d) Report the dual variable values of your solution. What do they mean?

Consider the following partial information from the sensitivity report:

Adjustable Cells

Cell	Name	Objective Coefficient	Allowable Increase	Allowable Decrease
	x1	5	1E+30	0
	x2	3	0	1E+30
	x3	1	5	1E+30

Constraints

Cell	Name	Constraint R.H. Side	Allowable Increase	Allowable Decrease
	resource 1	6	1E+30	3
	resource 2	15	15	15

e) Due to bankruptcy of the competitor "Orange" 15 more units of resource 2 (second constraint) will become available very cheap. How do the objective function value and the production plan change if the resource availability could be increased by 15 units? (Say as much as you can based on the information you have.)
What changes if the second resource is increased to 31?

f) The sales department has decided that the maximum price for product 3 that can be charged to the customers is 3. How do the objective function value and the production plan change? (Use the information you have; do not re-solve the problem.)

<u>Løsning exercise 2</u> (november 2007, Op.an. GK): Production planning in MicroCorp.

a)

		Cost:	5	3	1	0	0	
Cost	**BV**	**RHS**	**x_1**	**x_2**	**x_3**	**s_1**	**s_2**	**Ratio**
0	s_1	6	1	1	3	1	0	6/1=6
0	s_2	15	5	3	6	0	1	15/5=3
	z	0	0	0	0	0	0	
	c-z		5	3	6	0	0	
0	s_1	3	0	-3/5	9/5	1	-1/5	
5	x_1	3	1	3/5	6/5	0	1/5	3*5/3=5
	z	15	5	3	6	0	1	
	c-z		0	0	-5	0	-1	1st optimal
0	s_1	6	1	0	3	1	0	
3	x_2	5	5/3	1	2	0	1/3	
	z	15	5	3	6	0	1	
	c-z		0	0	-5	0	-1	2nd optimal

The solution is optimal because all reduced costs (c-z row) are less or equal to zero. In a maximization problem that means that the objective function value cannot be improved by further iterations.

b)
The given problem has multiple optimal solutions. That means, there are several (in this case two) extreme points which have the same objective function value. All feasible linear combinations of these solutions yield other solutions with the same objective function value.

c)
In a) we have already found two solutions: $x_1 = 3$, $x_2 = 0$ and $x_1 = 0$, $x_2 = 5$.
Form LP theory we know that all feasible linear combinations of these two solutions are also valid solutions.
In other words: All solutions on the line (constraint) between the two corner points found in a) are also optimal solutions.

The solutions can be expressed as:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = a_1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} + a_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

With: $a_1 + a_2 = 1 \qquad (a_1, a_2 \geq 0)$

The following linear combination is for example possible:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0.2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} + 0.8 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

(It is also correct to use all points on the objective function in the optimum. In that case one has to make sure that only feasible points are selected (between the extreme points).)

d)
The dual variable for the first constraint equals 0.
The dual variable for the second constraint equals 1.

The absolute values of dual variables equal the absolute values of the reduced costs of the slack/surplus variables in the constraint. In the above case the dual variables have to be positive because an increase in constraint right-hand-side of 1 will either improve the objective function or leave it unchanged. (Whenever a problem is relaxed [greater feasible area] the new solution cannot be worse than the old, because the old solution is still within the feasible area. Only if a constraint is tightened (in our case decreased right-hand-side) the old optimal solution might become infeasible.

The dual variables generally say how much the objective function will change if a specific right-hand-side value is increased by one. This statement is valid in the optimal solution. (It is not necessarily possible to change the right-hand-side by one without change in optimal basis. Range information gives valuable information here.)

e)
According to the range information in the sensitivity report, one can increase (or decrease) the right-hand-side by 15 units without changing the optimal basis. But if a right-hand-side of an active constraint is changed the production plan (values of x-variables) will change.
As long as the x-variables have nonzero objective coefficients the objective function value will also change.
In principle we have no information about how the variables will change in the sensitivity report. In this small problem however, we can see that the x-variable which is in the basis will change in value.
Since the dual variables are not given in the report we do not know how the objective will change. However, from d) we know that the dual variable for the second constraint is +1. Therefore the change in the objective function is an increase of 15.

If the right-hand-side is increased to 31, the basis will change. (We know that we can increase the right-hand-side up to 30 without changing the basis). If the basis changes, objective function value and production plan will change too. From the given sensitivity report we do not know how objective function and production plan will change.

It is possible to do the following reasoning:
If the constraint right-hand-side is increased the objective function value will increase too (or remain constant). We already know that the objective value increases with 15 units, if the right-hand-side is increased by 15 units. We also know that the x-variable in basis will increase. From the (simple) model we see that x_1 should be in basis and increase to 6. After that it cannot increase longer because of the first constraint. x_2 remains 0. The total objective function change will therefore be 15.

f)
We see from the sensitivity report that the objective function coefficient for x_3 can increase by 5 units without changing the basis. Since the marketing department can set this coefficient maximal to 3 the basis will not change.

That means, the production plan will not change (variable values remain the same) but the objective function value can change. Since x_3 is a non-basic variable (its value is 0) the objective function will not change in this case.
Product three will not be produced.

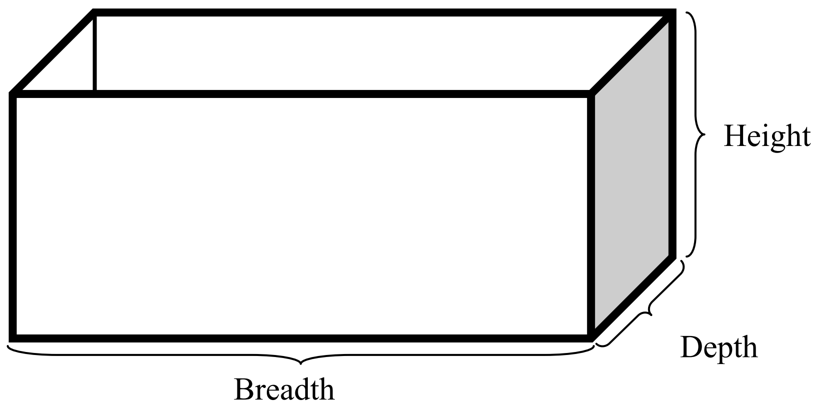
<u>Exercise 4</u> (25 %)

- **Gitt i Eksamen i Operasjonsanalyse 29. november 2007**
- **Oppgavene d) og e) er ikke pensum i TIØ4126**

Captain Bluetooth, the fearsome and cruel pirate who ruled the Mexican Gulf during the late part of the 17th century, was not just a dreaded captain but also a very skilful businessman. This means, that he had a lot of money to manage. You are now his assistant and are going to help him make different decisions.

The first thing on the Captain's agenda is to construct a treasure chest for all his gold coins. His specifications state that the chest should be wooden with metal reinforced edges. Most of the chest will be ordered from a Mexican Indian tribe called Tikiti and will not be part of your concern. Your task is to make sure that the chest is as big as possible given the limited amount of metal from Pedro the carpenter. Pedro has L length units of metal in his storage, and the chest should look like the chest in Figure 1.

Figure 1: A drawing of the treasure chest



Due to technical considerations, Pedro says that the depth and the height of the chest have to be equal and that all metal must be used. All in all, there are 12 edges that need to be reinforced.

a) Formulate the problem of maximizing the volume of the chest given that all edges need to be reinforced.

Captain Bluetooth looks at your work and seems very pleased, but he is not sure that Pedro will be able to solve the model. The Captain thinks that the biggest problem for Pedro will be to find the right ratio between the breadth and the height of the chest.

b) Help Pedro to find the right ratio between the breadth and the height of the chest by using the method of Lagrange multipliers.

Captain Bluetooth knows about this method and is very delighted that you have chosen it. He reckons it has something to do with penalties but is not sure in what way and asks you to explain it to him.

c) Calculate the Lagrange multiplier and express it as a function of the available metal L. You should also shortly explain its meaning in this problem.

The chest is now finished and Captain Bluetooth is very happy. There is just one little problem. During the production of the chest, the Captain's business flourished and he now has too many gold coins to fit in the chest. *But what a wonderful opportunity for real estate investments*, Captain Bluetooth thinks and asks you to investigate some of the villages around Port Louis where he currently lives.
Captain Bluetooth is interested in four criteria; how sunny it is, the general price level, the surroundings and the growth possibilities. After some research you have come up with the following grades for each of the five alternatives:

Name	Sun	Price	Surroundings	Growth
Plaza el Sol	95	40	70	80
Quesadilada	80	80	90	10
Ritinka	60	90	60	70
Srevinti	80	45	40	95
Toro los Toro	65	65	65	65

After reviewing his feelings, Captain Bluetooth gives you the following weights for each of the criteria:

	Sun	Price	Surroundings	Growth
Weight	0.30	0.15	0.40	0.15

d) Use the scoring model to calculate the score for each alternative and recommend a village for the Captain based on these scores.

Captain Bluetooth likes your recommendation, but he also must decide on which line of business he should start in his new town. From experience and some good sources, he knows that three business sectors are expected to be especially fruitful in the coming years. The sectors are agriculture, bean vending and curare manufacturing. All sectors are very dependent on the weather conditions, and Captain Bluetooth asks you to collect some data so that he can make the right decision. You contact the local authorities and soon come back with the following payoff table where all payoffs are measured in thousands of pesetas:

	Little sun / Little rain	Little sun / Much rain	Much sun / Little rain	Much sun / Much rain
Agriculture	4	12	23	27
Bean vending	32	23	8	11
Curare manufacturing	11	7	49	21

Since decision analysis is not one of Captain Bluetooth's interests, he asks you to calculate which business sector to go for.

e) Calculate the recommended decision given the Hurwicz criterion. Since the Captain is a pessimistic person, the coefficient of optimism, α, should be 0.30.

The hill tribes around the village are very pleased that Captain Bluetooth has chosen their village and want to help. They have lived in the area for a long time and have very good knowledge of the weather in this part of Mexico. They say that during the last 100 years, there have been 30 years that they consider years with much sun, and 70 years with little sun. During 40 of the 100 years, it has rained a lot and during 60 almost nothing. They do not see any signs of changing weather and believe that the weather the coming years will be like it has been. Since Captain Bluetooth is a believer in the ways of the hill tribes he wants you to take this statistical data into consideration when you evaluate the sectors.

f) Use the statistical data to calculate the expected value of each decision and base your recommended decision on this.

On Chakmanskinka, a high mountain not far from the village, lives a sun cult called Sonne Lieb. This cult has often helped the village, especially when the rain is too heavy. By performing their sun dance, Borelis Minos, they can make the sun shine for a couple of days so that the fields around the village can dry. Sonne Lieb is very excited about the arrival of Captain Bluetooth and offers him to do the Sun Dance, Borelis Majos. They say "*We can with 100% certainty guarantee that the coming years will be years with much sun if we perform Borelis Majos*". The Captain asks if this will influence the rain, but the masters of the cult only shake their heads and bless the sun. Unfortunately, the dance comes with a little cost. The cult needs 8 000 pesetas in order to perform it. The Captain does not know how to evaluate this so he asks you to do it.

g) Evaluate if Captain Bluetooth should pay for Borelis Majos.
If yes, how much more will he earn if he pays the cult (including the cost of the dance)?
If no, how much is he willing to pay the cult?

Captain Bluetooth thinks that all calculations are a bit too much for him and asks you to explain the decision problems in a simpler way.

h) Draw the decision trees for the decision problems in f) and g).

<u>Løsning exercise 4</u> (20 %): The fearsome and cruel pirate

a)
To formulate the problem as a mathematical program, we need one variable for the height of the chest and one for the breadth. Since the depth and the height have to be equal, only these two variables are needed.

b = The breath of the chest
h = The height of the chest

$$\begin{aligned} \max \quad & bh^2 \\ s.t. \quad & 4b + 8h = L \\ & b, h \geq 0 \end{aligned}$$

b)
Form the Lagrangean function *L* and solve the equation system given by the first order optimality conditions ($\nabla L = 0$). Note that the non-negative constraints are excluded from the Lagrangean function; this can be motivated by the fact that both the height and the breadth must be greater than zero.

$$\max L(b,h,\lambda_1) = bh^2 - \lambda_1(4b + 8h - L)$$

$$\begin{aligned} \partial L / \partial b &= h^2 - 4\lambda_1 = 0 \qquad && (1) \\ \partial L / \partial h &= 2bh - 8\lambda_1 = 0 \qquad && (2) \\ \partial L / \partial \lambda_1 &= -4b - 8h + L = 0 \qquad && (3) \end{aligned}$$

$$(1) \Rightarrow h = 2\sqrt{\lambda_1} \Rightarrow (2): 4b\sqrt{\lambda_1} - 8\lambda_1 = 0 \Rightarrow b = 2\sqrt{\lambda_1}$$

$$\Rightarrow b/h = 1$$

Since we are only interested in the ratio between the breadth and height we do not have to solve the equation system. We only need to find an expression for the ratio that is independent of λ_1.

c)
Use the results from b) to derive an expression for λ_1.

$$h = b = 2\sqrt{\lambda_1} \Rightarrow (3): -8\sqrt{\lambda_1} - 16\sqrt{\lambda_1} + L = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = L^2/24^2 = L^2/576$$

The Lagrangean multiplier expresses the marginal change in the objective function value as a function of the right-hand-side of the constraint. In this case this means how much the volume will change if Pedro gets more metal, i.e. if *L* increases.

d)

Calculate the score of each alterative as the sum of weights times scores. Then choose the alternative with the highest score.

$$S_P = 95 \cdot 0.30 + 40 \cdot 0.15 + 70 \cdot 0.40 + 80 \cdot 0.15 = 74.5$$

$$S_Q = 80 \cdot 0.30 + 80 \cdot 0.15 + 90 \cdot 0.40 + 10 \cdot 0.15 = 73.5$$

$$S_R = 60 \cdot 0.30 + 90 \cdot 0.15 + 60 \cdot 0.40 + 70 \cdot 0.15 = 66$$

$$S_S = 80 \cdot 0.30 + 45 \cdot 0.15 + 40 \cdot 0.40 + 95 \cdot 0.15 = 61$$

$$S_T = 65 \cdot 0.30 + 65 \cdot 0.15 + 65 \cdot 0.40 + 65 \cdot 0.15 = 65$$

The recommended alternative is Plaza el Sol.

e)

The Hurwicz criterion strikes a compromise between the maximax and maximin criteria. How much of each criterion used is governed by the coefficient of optimism. The formula to use is the following

$$\max_b \left(\alpha \max_s P(b,s) + (1-\alpha) \min_s P(b,s) \right)$$

With the coefficient of optimism equal 0.30 this gives

$$P_A = 27 \cdot 0.30 + 4 \cdot 0.70 = 10.9$$

$$P_B = 32 \cdot 0.30 + 8 \cdot 0.70 = 15.2$$

$$P_C = 49 \cdot 0.30 + 7 \cdot 0.70 = 19.6$$

The recommended alternative is curare manufacturing.

f)

Start by calculating the probability for each scenario. Use the notation MS and LS for much sun and less sun respectively and MR and LR for much rain and less rain.

$$P(LS \cap LR) = 0.70 \cdot 0.60 = 0.42$$

$$P(LS \cap MR) = 0.70 \cdot 0.40 = 0.28$$

$$P(MS \cap LR) = 0.30 \cdot 0.60 = 0.18$$

$$P(MS \cap MR) = 0.30 \cdot 0.40 = 0.12$$

From this the expected values can be calculated

$$E(A) = 4 \cdot 0.42 + 12 \cdot 0.28 + 23 \cdot 0.18 + 27 \cdot 0.12 = 12.42$$

$$E(B) = 32 \cdot 0.42 + 23 \cdot 0.28 + 8 \cdot 0.18 + 11 \cdot 0.12 = 22.64$$

$$E(C) = 11 \cdot 0.42 + 7 \cdot 0.28 + 49 \cdot 0.18 + 21 \cdot 0.12 = 17.92$$

The expected value of the decision problem is 22.64 and the recommended decision is to start with bean vending.

g)
Since the cult can guarantee that there will be much sun, the probabilities regarding the amount of sun will change to $P(MS) = 1.00$ and $P(LS) = 0.00$. With these new probabilities, the calculations are as follows.

$$P(LS \cap LR) = 0.00 \cdot 0.60 = 0.00$$

$$P(LS \cap MR) = 0.00 \cdot 0.40 = 0.00$$

$$P(MS \cap LR) = 1.00 \cdot 0.60 = 0.60$$

$$P(MS \cap MR) = 1.00 \cdot 0.40 = 0.40$$

When calculating the expected values of the alternatives, the costs for Borelis Majos are included in the expressions.

$$E(A) = 4 \cdot 0.00 + 12 \cdot 0.00 + 23 \cdot 0.60 + 27 \cdot 0.40 = 24.6 - 8 = 16.6$$

$$E(B) = 32 \cdot 0.00 + 23 \cdot 0.00 + 8 \cdot 0.60 + 11 \cdot 0.40 = 9.2 - 8 = 1.2$$

$$E(C) = 11 \cdot 0.00 + 7 \cdot 0.00 + 49 \cdot 0.60 + 21 \cdot 0.40 = 37.8 - 8 = 29.8$$

The expected value of the new decision problem is 29.8, which means that it is profitable for the Captain to buy the dance. The Captain will earn 29.8 – 22.64 = 7.16 extra if he gives the cult the money.

<u>Oppgave 2</u> (vekt 25 %)

- **Gitt i Eksamen i Operasjonsanalyse grunnkurs 9. desember 2006**
- **Oppgave a) anvender noen beslutningskriterier som vi ikke har brukt, men det kan likevel resonneres rundt 1) og 2).**

En investor vurderer tre ulike investeringsalternativer; 1) Oljeselskapet StatNor, 2) Kullprodusenten CoalSlaw og 3) Petrokjemiselskapet PetroChem. Avkastningen for de tre alternativene er analysert, og de viser seg å avhenge av prisutviklingen for råolje, og kan oppsummeres i følgende payoff-tabell (tall i mill. NOK):

	Hendelse	
Investeringsbeslutning	Økning i råoljepris	Nedgang i råoljepris
StatNor	72	12
CoalSlaw	22	62
PetroChem	30	48

a. Hva vil beslutningen være dersom investoren er hhv. 1) Pessimistisk og risikoavers og 2) Optimistisk og risikosøkende? Hvordan er beslutnings-kriteriet *Minimax regret*, og hva blir beslutningen dersom en benytter dette kriteriet?

b. Videre antar vi at det vurderes som 40 % sannsynlig at en får en økning i råoljeprisen, mens det er 60 % sannsynlig at prisen går ned. Bruk beslutnings-tre til å finne beste beslutning. Kunne samme svar blitt funnet på en enklere måte? Forklar i så fall hvordan.

Videre i denne oppgaven får en høre at de to siste investeringsalternativene, CoalSlaw og PetroChem, ikke viser seg å være aktuelle. Derimot er det et alternativ å sette pengene i et sikkert fond med avkastning på 40. Denne fondsavkastningen antas å være trygg og sikker, uavhengig av prisutviklingen på råolje.

c. Det er mulig å leie et konsulentselskap for å gjøre en omfattende markedsanalyse. Denne analysen kan gi større sikkerhet med tanke på utfallet av oljeprisen. Hva er maksimal verdi for en slik analyse?

Markedsanalysen beskrevet i c) koster 10 [mill. NOK]. Tidligere erfaringer viser at sannsynligheten for at markedsanalysen viser økning i oljepris er 80 % i de tilfellene dette faktisk viser seg å bli tilfelle. Det er 30 % sjanse for at analysen viser økt oljepris når dette viser seg å ikke stemme.

d. Bør investoren kjøpe markedsanalysen? Begrunn svaret. (Tips: $P(i \cap j) = P(i)P(j \mid i)$)

<u>Løsning Oppgave 2</u> (des 2006)

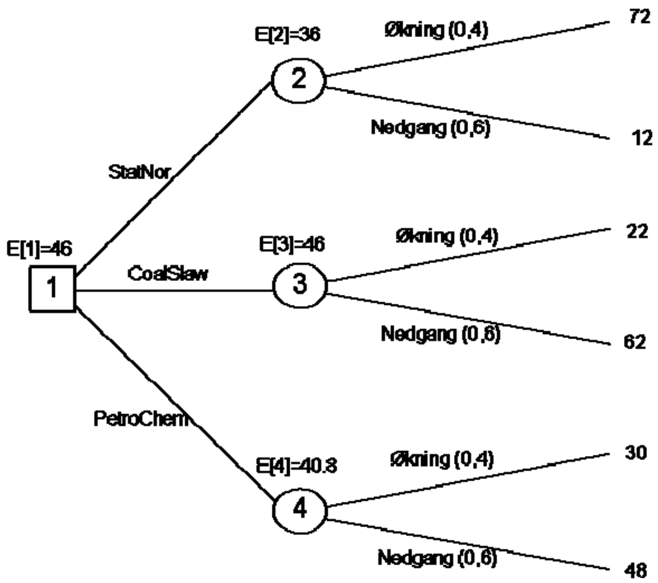
a)

1) Dersom investoren er pessimistisk og risikoavers, vil han benytte *maximin-kriteriet*, hvor en antar verste hendelse for hvert investeringsalternativ og velger den beste av disse. Vil da velge i dette tilfelle velge $\max\{12,22,30\}=30$, og PetroChem blir valgt.

2) Dersom investoren er optimistisk og risikosøkende, vil han benytte *maximax-kriteriet*. Her antar en beste hendelse for hvert inv esteringsalternativ og velger den beste av disse. Vil da velge i dette tilfelle velge $\max\{72,62,48\}=72$, og StatNor blir valgt.

Ved minimax-regret vil en velge det alternativet som gir det minste maksimale angrebeløpet. Dersom en velger velger StatNor og det blir en nedgang i oljepris, vil en angre på at en ikke valgte CoalSlaw. Angrebeløpet blir da 62-12 = 50. Dersom en velger CoalSlaw og det blir oppgang i oljepris vil en angre på at en ikke valgte StatNor og angrebeløpet blir 72-22 = 50. Dersom en velger PetroChem og det blir økning i oljepris, vil en også angre på at en ikke valgte StatNor, og angrebeløpet blir 72-30 = 42. Vil da velge i dette tilfelle velge $\min\{50,50,42\}=42$, og PetroChem blir valgt.

b) Beslutningstre:



Ut i fra beslutningstreet over ser vi at beslutningen blir CoalSlaw.

En kunne her ha regnet forventningsverdiene direkte for hvert beslutningsalternativ istedet for å tegne beslutningstreet.

c) Maksimal verdi for markedsanalyse.

Maksimal verdi en er villig til å betale for en markedsanalyse tilsvarer hva en maksimalt kan forvente å få i gevinst ved å inneha perfekt informasjon. Nå er det to gjenstående investeringsalternativer; 1) StatNor og 2) fond. Forventet verdi av å investere i StatNor er beregnet i b) til å være 36, mens forventet verdi av fond = 40 (avkastning uavhengig av oljepris).

Forventet verdi dersom en har perfektinformasjon er:

$$\sum_{i=1}^{2} P(x_i) \max_j \ z_{ij} = 0.6 \cdot 40 + 0.4 \cdot 72 = 24 + 28.8 = 52.8$$

Det betyr at maksimal verdi for en markedsanalyse er 52.8 – 40 = 12.8 (forutsatt at den gir perfekt informasjon).

d) Bør en kjøpe markedsanalyse til 10 mill. NOK?

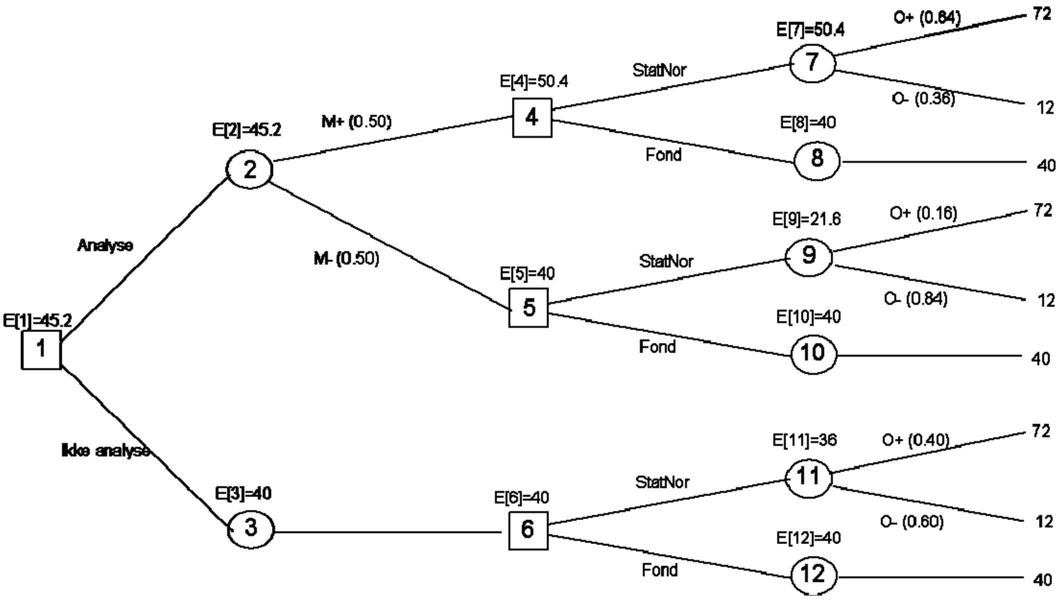
La oss definere O+ og O- som hendelsen for at oljeprisen henholdsvis øker og reduseres. Da er $P(O+) = 0.4$, mens $P(O-) = 0.6$. Definer videre M+ og M- som utfallene at markedsanalysen henholdsvis viser økning og nedgang i oljepris. Oppgaveteksten gir oss da følgende betingede sannsynligheter: $P(M+|O+) = 0.8$, $P(M+|O-) = 0.3$. Siden summen av sannsynlighetene er 1 kan vi også beregne følgende: $P(M-|O+) = 0.2$, $P(M-|O-) = 0.7$.

Vi behøver her også P(M+), P(M-), samt de betingede sannsynlighetene P(O+|M+), P(O+|M-), P(O-|M+) og P(O-|M-). Vil da beregne tallene i følgende simultane sannsynlighetstabell:

	O+	O-	P(M+), P(M-)
M+	0.32	0.18	0.50
M-	0.08	0.42	0.50
P(O+), P(O-)	0.40	0.60	1.00

For å beregne tallene i tabellen over har vi brukt vi formelen for sannsynligheten for simultane hendelser (snitt) oppgitt i oppgaven. Videre kan vi nå beregne de nye betingede sannsynlighetene ved å snu om på samme formel.
P(O+|M+) = 0.32/0.50 = 0.64
P(O+|M-) = 0.08/0.50 = 0.16
P(O-|M+) = 0.18/0.50 = 0.36
P(O-|M-) = 0.42/0.50 = 0.84

Nå kan vi tegne følgende beslutningstre:



Vi ser at markedsanalysen øker forventningsverdien med 5.2 [mill. NOK]. Det betyr at testen ikke er verd mer enn det, og følgelig ikke verd 10. Investoren bør derfor ikke kjøpe markedsanalysen.

<u>Oppgave 2</u> (vekt 30 %)

- **Gitt i Eksamen i Operasjonsanalyse grunnkurs 18. desember 2004**

Hver sommer tjener Eva penger på å tegne portretter (karikaturer) på torget i Trondheim. Eva tegner mens kunden sitter modell. Noen er lett å tegne, andre krever mer arbeid. Anta at tegnetiden er eksponensialfordelt med forventning 15 minutter.

Eva har en ekstra stol hvor det er mulig for en kunde å vente. Således er det maksimalt to kunder i dette "systemet"; én som tegnes og én som venter. Når "ventestolen" er opptatt, går potensielle kunder forbi og kommer ikke tilbake.

Eva har erfart at det er vanskelig å få kunder når hun ikke tegner (dvs når systemet er tomt), og at det er tilsvarende større tilstrømning av kunder mens hun tegner en kunde. Anta at kundene kommer tilfeldig. Antall kunder som ankommer er Poissonfordelt med ankomstrate $\lambda_1 = 6$ per time når Eva tegner. Når hun ikke tegner er ankomstraten kun $\lambda_0 = 2$ per time.

Eva tjener 250 kroner per portrett. Ignorer at en dag har begrenset lengde slik at du kan basere deg på stasjonærsannsynligheter.

a) Tegn diagram med mulige tilstander, stasjonærsannsynligheter og overganger etc.

b) Finn betjeningsraten μ. Finn også analyttiske uttrykk for sannsynligheten for
   i. Ingen kunder i systemet
   ii. En kunde i systemet
   iii. To kunder i systemet

c) Sett inn tallene fra oppgaveteksten og beregn
   i. Forventet antall i systemet
   ii. Forventet antall i kø

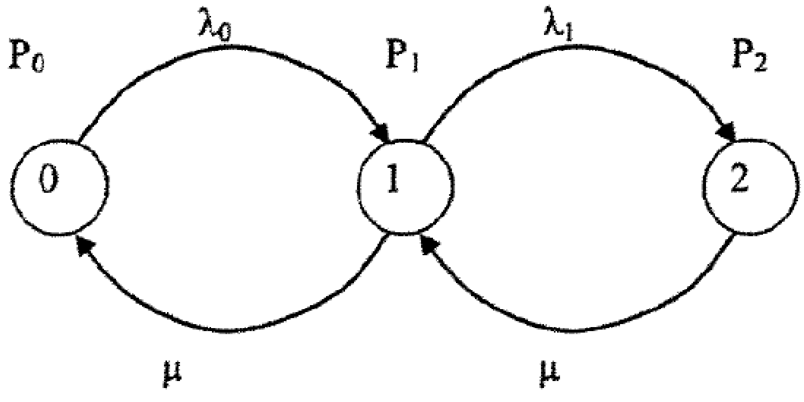
d) Hvor meget vil Eva tjene per time?

Eva lurer på om det kanskje er gunstig å bruke lengre tid på tegningen (gjøre seg mer flid med den) når det ikke er noen kunde som venter på tur.

e) Bruk modellen overfor til å drøfte om det lønner det seg for Eva å bruke mer tid i dette tilfellet. Tips: hvordan kan en slik lengre tegnetid tas hensyn til i modellen? Gjelder resultatet for alle $\lambda_0 < \lambda_1$?

Løsning Oppgave 2 (des 2004)

a)



b)

Vi betrakter ankomst og avgang av kunder som en fødsels- og dødsprosess. Tilstand n angir at det er n kunder i "systemet" $n = 0, 1, 2$. Fødselsraten i tilstand 0 er $\lambda_0 = 2$ per tidsenhet (time), mens den i tilstand 1 er lik $\lambda_1 = 6$. Forventet betjeningstid er oppgitt til 1/4 time tid slik at "dødsraten" eller betjeningsraten er lik lik $\mu = 4$ per tidsenhet (time).

Vi betrakter nå et lite tidsrom Δt. Sannsynligheten for en "fødsel" eller ankomst i dette bittelille tidsrommet er $\lambda_i \Delta t$ i tilstand i=0,1 og sansynligheten for et dødsfall eller ferdigbetjening er lik $\mu\Delta t$ i tilstand 1 og 2.

Vi ser først på tilstand 0. Man kan komme til $n = 0$ kun ved et "dødsfall" i tilstand $n = 1$. Sannsynligheten for å komme til tilstand $n = 0$ er således bestemt av sannsynligheten P_1 for å være i tilstand 1, multiplisert med sannsynligheten for "å dø" i denne tilstanden som er lik lik $\mu\Delta t$. Likeledes går man ut av tilstand $n = 0$ ved at det ankommer en kunde. Sannsynligheten for å forlate tilstand 0 er derfor lik $P_0 \cdot \lambda_0 \Delta t$.

Skal man være i en stasjonær tilstand (steady state) må sannsynligheten for å komme til en tilstand være lik sannsynligheten for å gå ut av den samme tilstanden. Dette gir:

$$P_0 \cdot \lambda_0 \Delta t = P_1 \cdot \mu \Delta t$$

$$P_1 = P_0 \frac{\lambda_0}{\mu}$$

Vi ser så på tilstand 1. Man kan komme til tilstand 1 ved at "systemet" er tomt, og at det ankommer en kunde, eller at det er 2 to kunder tilstede og den ene blir tegnet ferdig. Sannsynligheten for å komme til tilstand 1 er dermed lik $P_0\ \lambda_0 \Delta t + P_2 \mu\ \Delta t$. Man kan gå ut av tilstand 1 ved at det ankommer en kunde, eller ved at den ene kunden som er tilstede, blir tegnet ferdig og forlater systemet. Sannsynligheten for å gå ut av tilstand 1 blir $P_1\ \lambda_1 \Delta t + P_1\ \mu\ \Delta t$. I stasjonærtilstanden må sannsynligheten for å komme til tilstand 1 være lik sannsynligheten for å gå ut av den samme tilstanden: Det gir:

$$P_0\lambda_0\Delta t + P_2\mu\Delta t = P_1\lambda_1\Delta t + P_1\mu\Delta t$$

$$P_2\cdot\mu = P_1\lambda_1 + P_1\cdot\mu - P_0\cdot\lambda_0 = P_0\frac{\lambda_0}{\mu}\lambda_1 + P_0\frac{\lambda_0}{\mu}\mu - P_0\cdot\frac{\mu}{\mu}\lambda_0 = P_0\frac{\lambda_0}{\mu}\lambda_1$$

$$P_2 = P_0\frac{\lambda_0}{\mu}\frac{\lambda_1}{\mu}$$

Summen av sannsynlighetene P_0, P_1 og P_2 må være lik 1. (Systemet må være i en av dissse tilstandene):

$$P_0 + P_1 + P_2 = 1$$

$$P_0 + P_0\frac{\lambda_0}{\mu} + P_0\frac{\lambda_0}{\mu}\frac{\lambda_1}{\mu} = 1$$

$$P_0 = \frac{1}{1 + \frac{\lambda_0}{\mu} + \frac{\lambda_0}{\mu}\frac{\lambda_1}{\mu}}$$

$$P_1 = \frac{\lambda_0}{\mu}\left[\frac{1}{1 + \frac{\lambda_0}{\mu} + \frac{\lambda_0}{\mu}\frac{\lambda_1}{\mu}}\right]$$

$$P_2 = \frac{\lambda_0}{\mu}\frac{\lambda_1}{\mu}\left[\frac{1}{1 + \frac{\lambda_0}{\mu} + \frac{\lambda_0}{\mu}\frac{\lambda_1}{\mu}}\right]$$

c)

$$P_0 = \frac{1}{1+\frac{2}{4}+\frac{2}{4}\frac{6}{4}} = \frac{4}{9}$$

$$P_1 = \frac{2}{4}\cdot\frac{1}{1+\frac{2}{4}+\frac{2}{4}\frac{6}{4}} = \frac{2}{9}$$

$$P_2 = \frac{2\cdot 6}{4\cdot 4}\cdot\frac{1}{1+\frac{2}{4}+\frac{2}{4}\frac{6}{4}} = \frac{1}{3}$$

$$\text{Forventet antall i systemet } = \frac{4}{9}\cdot 0 + \frac{2}{9}\cdot 1 + \frac{1}{3}\cdot 2 = \frac{8}{9}$$

$$\text{Forventet antall i kø } = \frac{4}{9}\cdot 0 + \frac{2}{9}\cdot 0 + \frac{1}{3}\cdot 1 = \frac{1}{3}$$

d) For å finne hva Eva tjener per time, må vi beregne hvor mange kunder som forventningsmessig "går" gjennom "systemet" per time. Dette blir lik forventet ankomstrate (effektiv ankomstrate) som vi så multipliserer med inntekt per kunde:

$$\text{Effektiv ankomstrate} = \text{forventet ankomstrate} = \left(\frac{4}{9}\cdot 2 + \frac{2}{9}\cdot 6\right) = \frac{20}{9} = 2.222$$

$$\text{Forventet inntekt per time} = 250\left(\frac{4}{9}\cdot 2 + \frac{2}{9}\cdot 6\right) = \frac{5000}{9} = 555.56$$

e)

Vi kan utnytte modellen ovenfor til å ivareta muligheten til å "tegne sakte" ved å la betjeningsraten ved tilstand 1 være mindre enn betjeningsraten ved tilstand 2: $\mu_1 < \mu_2$. For å finne inntekten, må vi beregne den effektive ankomstraten med disse forutsetningene. Dette krever en ny beregning av P_0, P_1 og P_2. Vi innser at

$$P_1 = P_0 \frac{\lambda_0}{\mu_1}$$

$$P_2 = P_0 \frac{\lambda_0}{\mu_1} \frac{\lambda_1}{\mu_2}$$

Summen av sannsynlighetene P_0, P_1 og P_2 må være lik 1 :

$$P_0 + P_0 \frac{\lambda_0}{\mu_1} + P_0 \frac{\lambda_0}{\mu_1} \frac{\lambda_1}{\mu_2} = 1$$

$$P_0 = \frac{1}{1 + \frac{\lambda_0}{\mu_1} + \frac{\lambda_0}{\mu_1} \frac{\lambda_1}{\mu_2}}$$

$$\mathrm{P}_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1} \left[\frac{1}{1 + \frac{\lambda_0}{\mu_1} + \frac{\lambda_0}{\mu_1} \frac{\lambda_1}{\mu_2}} \right]$$

Finner effektiv ankomstrate:

$$\lambda_{EFF} = P_0 \cdot \lambda_0 + P_1 \cdot \lambda_1$$

$$\lambda_{EFF} = \left[\lambda_0 + \frac{\lambda_0}{\mu_1} \lambda_1 \right] \left[\frac{1}{1 + \frac{\lambda_0}{\mu_1} + \frac{\lambda_0}{\mu_1} \frac{\lambda_1}{\mu_2}} \right]$$

$$\lambda_{EFF} = \lambda_0 \mu_2 \left[\frac{\mu_1 + \lambda_1}{\mu_1 \mu_2 + \lambda_0 \mu_2 + \lambda_0 \lambda_1} \right]$$

Virkningen av en endring i $\mu_1$kan vi finne ved å derivere λ_{EFF} mht μ_1 :

$$\frac{\partial \lambda_{EFF}}{\partial \mu_1} = \lambda_0 \mu_2 \left[\frac{\lambda_0 \mu_2 + \lambda_0 \lambda_1 - \mu_2 \lambda_1}{[\mu_1 \mu_2 + \lambda_0 \mu_2 + \lambda_0 \lambda_1]^2} \right]$$

En reduksjon i $\mu_1$er gunstig såframt den deriverte $\frac{\partial \lambda_{EFF}}{\partial \mu_1}$ er negativ. Nevneren er alltid positiv. Faktoren $\lambda_0 \mu_2$ er også positiv. Fortegnet beror dermed på $\lambda_0 \mu_2 + \lambda_0 \lambda_1 - \mu_2 \lambda_1$:

$$\frac{\partial \lambda_{EFF}}{\partial \mu_1} \leq 0 \text{ hvis og bare hvis } \lambda_0 \mu_2 + \lambda_0 \lambda_1 - \mu_2 \lambda_1 \leq 0$$

$$\text{dvs hvis og bare hvis } \lambda_0 \leq \frac{\mu_2 \lambda_1}{\lambda_1 + \mu_2} = \lambda_1 \left[\frac{1}{\frac{\lambda_1}{\mu_2} + 1} \right]$$

Vi ser at det er lønnsomt "å tegne saktere" sålenge λ_0 mindre enn 2,4 mens $\lambda_1 = 6$. Det er således ikke lønnsomt å "tegne saktere" for alle $\lambda_0 \leq \lambda_1$.

Man kunne svart på dette spørsmålet også ved å sette opp uttrykket for

$\lambda_{EFF} = \lambda_0 \mu_2 \left[\frac{\mu_1 + \lambda_1}{\mu_1 \mu_2 + \lambda_0 \mu_2 + \lambda_0 \lambda_1} \right]$ og så prøve noen ulike verdier for μ_1. Det bør gi full uttelling. (Kandidatene er aldri stilt et slikt spørsmål).

Oppgave 2

- **Gitt i Eksamen i Operasjonsanalyse grunnkurs 31. juli 2001**
- **Løsningsforslaget bruker noe annerledes notasjon, med s_n istedenfor c_n (faktorene som opptrer i analysen av fødsels- og dødsprosessen), og derfor naturligvis c istedenfor s (antall servere). I tillegg skriver man p_n istedenfor P_n.**

Betrakt en bedrift som produserer en type produkt, hvor produksjonen foregår ved at halvferdige produkter kjøpes inn og behandles først i en maskin av type X og deretter i en maskin av type Y. Bedriften produserer i 8 timer pr arbeidsdag i 250 arbeidsdager pr år. Hvis arbeidet på en produktenhet ikke er ferdig ved arbeidstidens slutt, gjøres enheten ferdig. Den "ekstra" arbeidstiden som dette resulterer i, avspaseres neste morgen, slik at de maskinene som arbeidet lenge dagen før, starter senere dagen etter. Bedriften har to identiske maskiner av type X. Disse går kontinuerlig i arbeidstiden, slik den er definert foran. Behandlingstiden pr produktenhet på maskin av type X er eksponensialfordelt med en forventning på 30 minutter. Bedriften har 4 maskiner av type Y. Behandlingstiden for en produktenhet er eksponesial fordelt også på denne maskintypen. Men her er forventet behandlingstid 50 minutter pr enhet.

Bedriften har lagt opp produksjonen slik at X maskinene leverer til hvert sitt lager for varer i arbeid og disse lagrene leverer så til 2 av Y maskinene. Mellomlagrene anses her å ha stor nok kapasitet til å lage det nødvendige antall enheter. Lagerkostnaden pr år pr enhet som i gjennomsnitt ligger på mellomlageret, antas å være kr 50000,-

Besvar følgende spørsmål med best mulig bruk av pensum:.

a) Hvor mange enheter vil bedriften produsere pr. år?

b) Hvor stor lagerkostnad vil bedriften få pr år?

c) Hvor mye har bedriften råd til å betale pr år for å samle mellomlagrene til et mellomlager?

<u>Løsning Oppgave 2</u> (vår 2001)

a) Det er 2 Y maskiner pr X maskin. Forventet behandlingstid på Y maskinene er 50 minutter. Dvs. at Y maskinene knyttet opptil hver X maskin har tilsammen en gjennomsnittelig kapasitet i antall enheter pr time på $2 \cdot \frac{60}{50} = 2.4$. Dette er nok til å ta unna de 2 enhetene som hver masin av type X produserer pr time. Dvs.:

$$\text{Antall enheter pr år} = 2 \cdot 2 \cdot 8 \cdot 250 = 8000$$

b) For å finne lager kostnaden pr år, trenger vi størrelsen på gjennomsnittslageret. Til det trenger vi en kømodell:

Tar utgangspunkt i den layout-en som er beskrevet i oppgaven og ser på en X maskin med tilhørende Y maskiner. Vi gjør den symbolske regningen litt mer generell for også å kunne bruke den i senere spørsmål. Alle behandlingstidene er eksponsialfordelt så vi har situasjoner med *M/M*-køer

$\lambda_n = \lambda =$ antall ankomster pr time

$$\mu_n = \begin{cases} n\mu & \text{for} \quad 1 \le n < c \\ c\mu & \text{for} \quad n \ge c \end{cases} = \text{antall ferdig behandlinger pr time med n "kunder" i systemet}$$

$c =$ antall Y maskiner i det systemet vi betrakter

Generelle køformler:

$$s_0 = 1$$

$$s_n = \frac{\lambda_{n-1}}{\mu_n} \cdot s_{n-1} \qquad , n \ge 1$$

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} s_n$$

$$p_n = s_n S^{-1} = \text{sannsynlighet for } n \text{ kunder i systemet}$$

$$L_q = \sum_{n=c+1}^{\infty} (n-c)p_n = \text{forventet antall i kø}$$

Her trenger vi å regne for $c = 2$, mens vi i det neste spørsmålet trenger år regne for $c = 4$.

Utfra dette er det mulig å sette inn tall og regne numerisk inntil summene ikke forandrer seg lenger. Vi velger imidlertid å regne symbolsk så langt som mulig.

Vi definerer

$$\rho = \frac{\lambda}{c\mu}$$

og får:

$$\begin{aligned}
S &= 1 + \sum_{n=1}^{c-1} \frac{\lambda_0 \ldots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \ldots \mu_n} + \sum_{n=c}^{\infty} \frac{\lambda_0 \ldots \lambda_{c-1}}{\mu_1 \ldots \mu_c} \cdot \left(\frac{\lambda}{c\mu} \right)^{n-c} \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{c-1} \frac{\lambda^n}{n! \mu^n} + \frac{\lambda^c}{c! \mu^c} \sum_{n=c}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{c\mu} \right)^{n-c} \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{c-1} \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n + \frac{c^c}{c!} \cdot \rho^c \cdot \frac{1}{1-\rho}
\end{aligned}$$

Vi trenger bare sannsynlighetene for tilstander med kø. Vi nøyer oss derfor med å regne for $n \geq c$, og får:

$$\begin{aligned}
p_n &= S^{-1} \cdot \frac{\lambda_0 \ldots \lambda_{c-1}}{\mu_1 \ldots \mu_c} \cdot \left(\frac{\lambda}{c\mu} \right)^{n-c} \\
&= S^{-1} \cdot \frac{c^c}{c!} \cdot \rho^c \cdot \rho^{n-c} \\
&= S^{-1} \cdot \frac{c^c}{c!} \cdot \rho^n
\end{aligned}$$

Den nest siste versjonen er enklest å bruke videre:

$$\begin{aligned}
L_q &= \sum_{n=c+1}^{\infty} (n-c) p_n = \sum_{n=c+1}^{\infty} (n-c) \cdot S^{-1} \cdot \frac{c^c}{c!} \cdot \rho^c \cdot \rho^{n-c} \\
&= S^{-1} \cdot \frac{c^c}{c!} \cdot \rho^{c+1} \cdot \sum_{n=c+1}^{\infty} (n-c) \cdot \rho^{n-(c+1)} \\
&= S^{-1} \cdot \frac{c^c}{c!} \cdot \rho^{c+1} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \rho^{n-1} \\
&= S^{-1} \cdot \frac{c^c}{c!} \cdot \rho^{c+1} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot \rho^{n-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} n \cdot \rho^{n-1} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{d\rho} \rho^n = \frac{d}{d\rho} \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n = \frac{d}{d\rho} (1-\rho)^{-1} \\
&= -(1-\rho)^{-2} \cdot (-1) = \frac{1}{(1-\rho)^2}
\end{aligned}$$

$$L_q = S^{-1} \cdot \frac{c^c}{c!} \cdot \frac{\rho^{c+1}}{(1-\rho)^2}$$

Nå er vi klar for den numeriske regningen. I dette spørsmålet skal vi ha:

$$\lambda = 2$$
$$\mu = \frac{6}{5} = 1.2$$
$$c = 2$$

Dette gir

$$\rho = \frac{\lambda}{c\mu} = \frac{5}{6}$$

$$\begin{aligned} S &= 1 + \sum_{n=1}^{c-1} \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n + \frac{c^c}{c!} \cdot \rho^c \cdot \frac{1}{1-\rho} \\ &= 1 + \frac{1}{1!}\left(\frac{2}{1.2}\right)^1 + \frac{2^2}{2!} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{1-\frac{5}{6}} \\ &= 11 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_q &= S^{-1} \cdot \frac{c^c}{c!} \cdot \frac{\rho^{c+1}}{(1-\rho)^2} \\ &= 11^{-1} \cdot \frac{2^2}{2!} \cdot \frac{\left(\frac{5}{6}\right)^3}{\left(1-\frac{5}{6}\right)^2} \\ &= 3.7879 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_q &= S^{-1} \cdot \frac{c^c}{c!} \cdot \frac{\rho^{c+1}}{(1-\rho)^2} \\ &= 11^{-1} \cdot \frac{2^2}{2!} \cdot \frac{\left(\frac{5}{6}\right)^3}{\left(1-\frac{5}{6}\right)^2} \\ &= 3.7879 \end{aligned}$$

Dette gjelder bare lageret for den ene X maskinen. Totalt lager blir dobbelt så stort.

$$\begin{aligned} C_b &= \text{lagerkostnad i spm b} \\ &= 50000 \cdot 2 \cdot L_q \\ &= 0.379 \text{ millioner kroner} \end{aligned}$$

c) Når mellomlagrene samles får vi ett system hvor 2 X maskiner uavhengig av hverandre genererer "kunder" og 4 Y maskiner betjener kundene. Når genereringstidene i X maskinene er eksponesialfordelt, er antall ankomster pr tidsenhet fra hver maskin Poisson fordelt. Summen av uavhengige Poisson fordelte størrelser er også Poisson fordelt. Dvs. at tiden mellom ankomster til det felles mellomlageret er eksponsialfordelt og formlene for *M/M*-køer gjelder fortsatt:

I dette spørsmålet skal vi ha:

$$\lambda = 4$$
$$\mu = \frac{6}{5} = 1.2$$
$$c = 4$$

Dette gir

$$\rho = \frac{\lambda}{c\mu} = \frac{5}{6}$$

$$\begin{aligned} S &= 1 + \sum_{n=1}^{c-1} \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n + \frac{c^c}{c!} \cdot \rho^c \cdot \frac{1}{1-\rho} \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{3} \frac{1}{n!}\left(\frac{4}{1.2}\right)^n + \frac{4^4}{4!} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^4 \cdot \frac{1}{1-\frac{5}{6}} \\ &= 46.926 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_q &= S^{-1} \cdot \frac{c^c}{c!} \cdot \frac{\rho^{c+1}}{(1-\rho)^2} \\ &= 46.926^{-1} \cdot \frac{4^4}{4!} \cdot \frac{\left(\frac{5}{6}\right)^5}{\left(1-\frac{5}{6}\right)^2} \\ &= 3.2886 \end{aligned}$$

Dette gjelder lageret for begge X maskinene.

$$\begin{aligned} C_c &= \text{ lagerkostnad i spm c} \\ &= 50000 \cdot L_q \\ &= 0.164 \text{ millioner kroner} \end{aligned}$$

Den årlige kostnaden, K, ved å samle mellomlagrene må være mindre enn den årlige besparelsen for at det skal være lønnsomt:

$$K < C_b - C_c = 0.379 - 0.164 = 0.215 \text{ millioner koroner}$$

<u>Oppgave 3</u> (vekt 30 %)

- **Gitt i Eksamen i Operasjonsanalyse grunnkurs 18. desember 2001**
- **Oppgave a) anvender noen beslutningskriterier som vi ikke har brukt. Anvend i stedet Bayes' regel.**

Den franske bilfabrikanten "René Citrou" har utviklet 3 mulige nye bilmodeller, Alfa, Beta og Gamma. Bedriften har estimert total framtidig fortjeneste for de tre bilmodellene basert på prisnivået for bensin. Denne fortjenesten (i mill. kr) gis i tabellen som følger:

	Lav bensinpris	*Høy bensinpris*
Alfa	300	150
Beta	-100	600
Gamma	130	120

a) Bestem hvilken bilmodell bedriften bør satse på ved bruk av de følgende tre beslutningskriteriene: Maximax, Maximin og Minimax regret. Hvilken av bilmodellene velges, hvis en er optimistisk?

b) Kan vi eliminere noen av bilmodellene fra en videre analyse? Begrunn svaret.

Bedriften har estimert sannsynligheten for "Lav bensinpris" til å være P(L) = 0.6 og "Høy bensinpris" til å være P(H) = 0.4.

c) Hvilken bilmodell bør bedriften satse på ut ifra forventet fortjeneste og forventet alternativt tap (expected opportunity loss)?

d) Hvis bedriften hadde hatt mulighet for å få full informasjon om framtidig bensinpris, hva var maksimal pris bedriften var villig til å betale for denne informasjonen?

Bedriften vurderer å leie inn en petroleumsspesialist for å anslå framtidig bensinpris. Spesialisten vil i sin rapport konkludere med enten høy eller lav framtidig bensinpris. Sannsynligheten for at spesialisten vil indikere "Lav bensinpris", når "Lav bensinpris" virkelig inntreffer er 0.9, og sannsynligheten for at spesialisten vil indikere "Høy bensinpris", når "Høy bensinpris" virkelig inntreffer er 0.7. Spesialisten har prissatt oppdraget til 20 millioner kroner.

e) Bestem beslutningsstrategien som bedriften bør følge og forventet fortjeneste av denne strategien ved bruk av et beslutningstre. Bruk følgende informasjon, hvis du ønsker: $P(i \cap j) = P(i|j) * P(j)$. I tabellene under får du selv finne ut hva *i* og *j* er.

$P(i \cap j)$	j_1	j_2	$P(i)$
i_1	0.54	0.06	0.6
i_2	0.12	0.28	0.4
$P(j)$	0.66	0.34	

$P(i\|j)$	j_1	j_2
i_1	0.818	0.176
i_2	0.182	0.824

Løsning Oppgave 3 (des 2001)

Alle verdi tall er gitt i millioner kr.

a)
Maximax: max(300,600,130) = 600. Velg beta.

Maximin: max(150,-100,120) = 150. Velg alfa

	Lav	Høy
alfa	300 – 300 = 0	600 – 150 = 450
beta	300 + 100 = 400	600 – 600 = 0
gamma	300 – 130 = 170	600 – 120 = 480

Minimum (max regret): min(400,480) = 400. Velg beta.

Hvis en er optimistisk velges beta, for maximax er et optimistisk beslutningskriterie.

b)
Vi leter etter dominante strategier. For lav bensinpris har alfa 300 mens gamma bare 130. Samtidig har alfa 150 og gamma 120 for høy bensinpris. Alfa er best for begge bensinprisutfallene. Det betyr at gamma er dominert og elimineres fra den videre analysen.

c)
EV(alfa) = 300*0.6+150*0.4=240
EV(beta) = -100*0.6+600*0.4=180
Velg alfa.

Bruker under tall fra regret-tabell:

EOL(alfa) = 0*0.6+450*0.4=180
EOL(beta) = 400*0.6+0*0.4=240
Velg alfa.

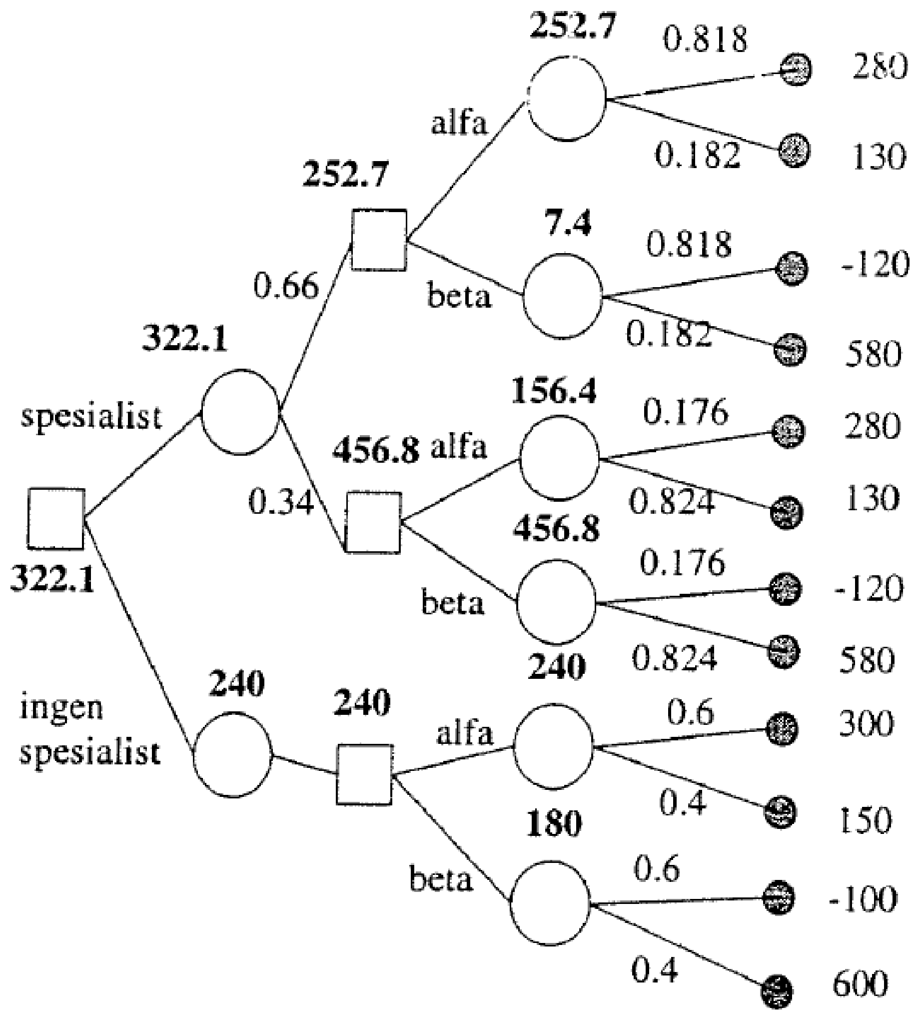
d)
Forventet verdi av perfekt informasjon EVPI(alfa) = EOL(alfa) = 180. Bedriften ville ikke betalt mer enn 180 millioner kr for å få perfekt informasjon. EVPI kan også regnes direkte:
EVPI=
max bilmodel fortjeneste ved L * P(L) + max bilmodel fortjeneste ved H* P(H) - EV(alfa)
= 300*0.6+600*0.4-240=180

e)

P(IL) - Indikerer lav bensinpris

P(IH) - Indikerer høy bensinpris

P(IL)	=	0.66
P(IH)	=	0.34
P(L|IL)	=	0.818
P(H|IL)	=	0.182
P(L|IH)	=	0.176
P(H|IH)	=	0.824



Vi ser at en vil leie inn en spesialist og hvis spesialistens resultater indikerer lav bensinpris vil en gå for alfa, mens hvis den indikerer høy bensinpris vil en satse på beta. Forventet verdi av denne strategien er 322.1