NTNU
NORGES TEKNISK-NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
INSTITUTT FOR KONSTRUKSJONSTEKNIKK

Faglig kontakt under eksamen : Leif Rune Hellevik
Tlf.: (735)94535

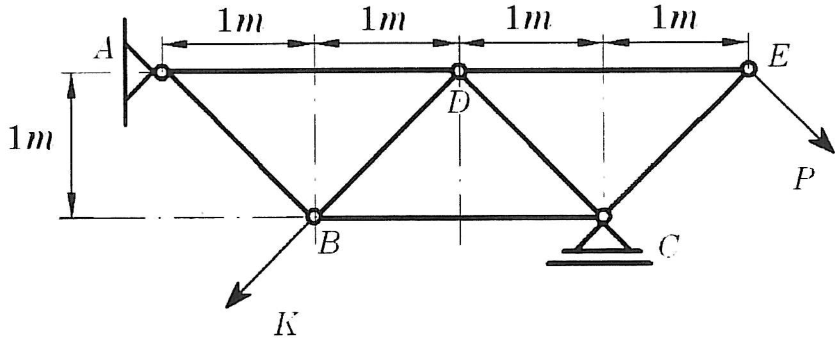
EKSAMEN I FAG TKT4126 MEKANIKK

Mandag 4. august 2008
Tid: kl. 9.00 - 13.00

Tillatte hjelpemidler: C - Godkjent kalkulator
Rottmann : Matematisk formelsamling.
Irgens : Formelsamling Mekanikk

Språkform: Bokmål
Sensurdato: Senest 1. september

Oppgave 1 (25%)

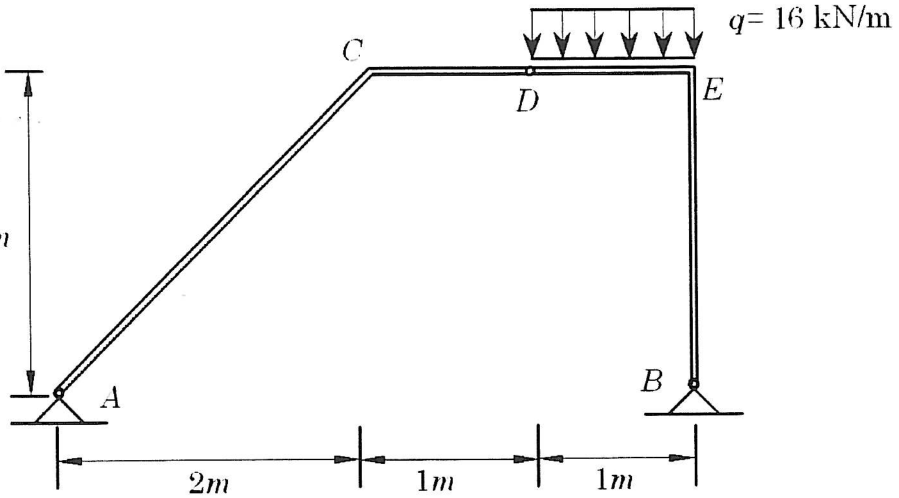


Figuren viser et fagverk opplagret med et fast boltelager i A og et glidelager i C. Dimensjoner i meter som vist på figuren. Fagverket er belastet med en kraft $P = 12\sqrt{2}$ kN i E og en kraft$K = 18\sqrt{2}$ kN i B. Begge kreftene danner 45^o med horisontalen.

a) Vis at fagverket er statisk bestemt og bestem opplagerreaksjonene i A og C.

b) Bestem alle stavkreftene og angi strekk- og trykkstaver på figur.

Oppgave 2 (25%)

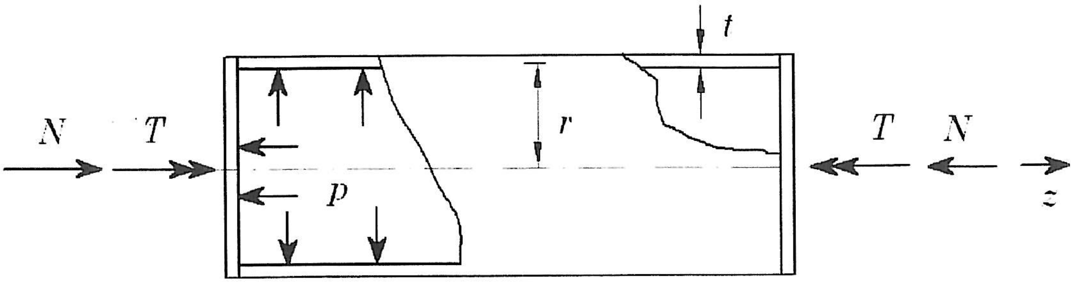


Figuren viser en ramme som er opplagret med faste boltelagre i A og B og som har et indre ledd i D. Ramma består av skråbjelken AC som er stivt forbundet med den horisontale bjelken CD og bjelken DE som er stivt forbundet med den vertikale bjelken EB. Dimensjoner i meter som angitt på figuren.
Ramma er belastet med en jevnt fordelt belastning $q = 16\,\text{kN/m}$langs DE.

a) Vis at ramma er statisk bestemt og bestem lagerreaksjonene i A og B samt leddkrefter i D. Tegn kraftbilde.

b) Beregn og tegn moment-, skjær- og aksialkraftdiagram for ramma. Påfør størrelser og virkningsymboler på diagrammene.
(For momentdiagrammet kan virkningsymboler utelates dersom diagrammet tegnes på strekksiden).

Oppgave 3 (25%)



Figuren viser en beholder laget av et sirkulært rør med midlere radius $r = 100\,\text{mm}$ og veggtykkelse $t = 5\,\text{mm}$. Beholderen kan belastes med et indre trykk p, et torsjonsmoment T og en aksialkraft N (Strekk eller trykk). Flytespenning $f_y = 260\,\text{MPa}$.

a) Belaster med $p = 10\,\text{MPa}$ og $T = 20\,\text{kNm}$(med dreieretning som vist på figuren). Beregn spenningene som virker på et element i rørveggen.

b) Beregn hovedspenningene og hovedretningene samt maksimal skjær-spenning for elementet i spørsmål a)

c) Tegn Mohrs sirkel for denne spenningstilstanden.

d) Holder p konstant med verdi som gitt i spørsmål a). Øker torsjonsmomentet til flytning inntreffer i følge Tresca-kriteriet. Beregn det tilhørende flyte-torsjonsmomentet T_y.

Oppgave 4 (25%)

Vi fortsetter med beholderen i oppgave 3. I tillegg til dimensjonene som er gitt, har beholderen en lengde $L = 1000\,\text{mm}$. Her antar vi at de gitte dimensjonene refererer til tilstanden før beholderen belastes. Materialdata : $E = 2.0 \cdot 10^5\text{MPa}$, $\nu = 0.3$

a) Bestem lengdeforandringen ΔL samt forandringen av tykkelsen Δt forårsaket av belastningen i oppgave 3, spørsmål a)

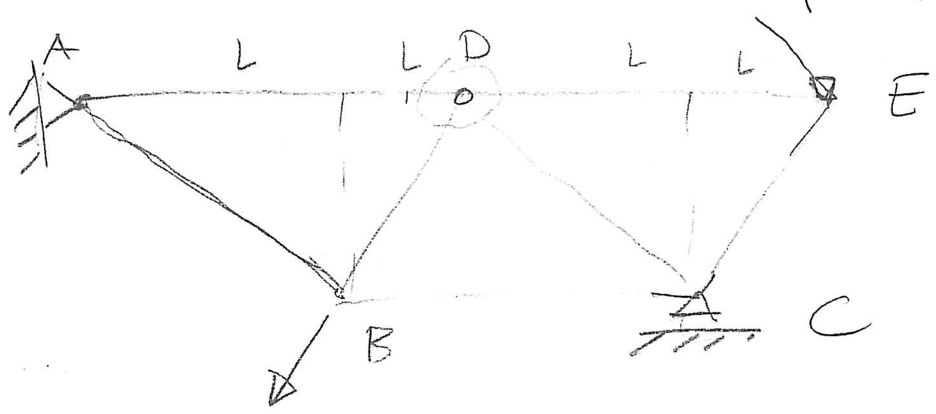
b) Bestem forandring av radius Δr for belastningen i oppgave 3, spørsmål a)

c) Vi starter med belastningen i oppgave 3, spørsmål a). Denne belastningen gir en lengdeforandring som vi har beregnet i spørsmål a) ovenfor. Beregn aksialkrafta Nsom skal til for å eliminere denne lengdeforandringen.

d) Vi starter med belastningen i oppgave 3, spørsmål a). Bestem aksialkrafta N_y som er nødvendig for å gi flytning i følge Mises-kriteriet.

Oppgave 1   4126 høst-08   Side 1

$P = 12\sqrt{2}$ kN

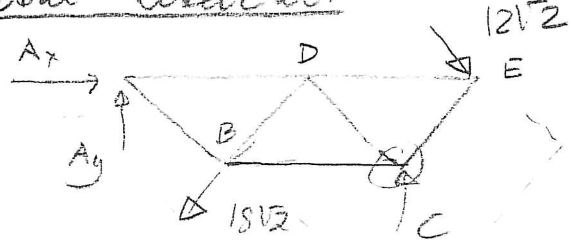


$\frac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$K = 18\sqrt{2}$ kN

$$\boxed{\begin{aligned} A_x &= 6 \\ A_y &= 2 \\ C &= 28 \end{aligned}}$$

a) Global likevekt.



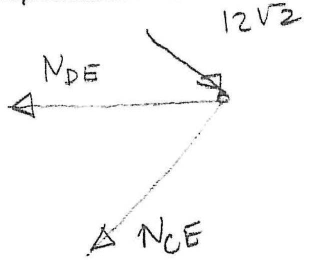
$$\Sigma M_A = 0: \; 18\sqrt{2}\cdot L\cdot\sqrt{2} + 12\sqrt{2}\cdot 2L\sqrt{2} - 3L\cdot C = 0$$

$$\Rightarrow C = \frac{1}{3}\left[36 + 48\right] = \underline{28}$$

$$\Sigma F_x = 0: \; A_x + \frac{1}{\sqrt{2}}(12\sqrt{2} - 18\sqrt{2}) = 0 \Rightarrow A_x = \underline{6}$$

$$\Sigma F_y = 0: \; A_y + C - \frac{1}{\sqrt{2}}(18\sqrt{2} + 12\sqrt{2}) = 0 \Rightarrow A_y = 30 - 28 = \underline{2}$$

b) Knutepkt. E



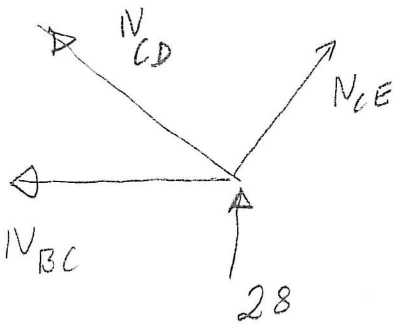
$$\Sigma F_y = 0: \; \frac{N_{CE}}{\sqrt{2}} + \frac{12\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 0$$

$$\Rightarrow N_{CE} = \underline{-12\sqrt{2}}$$

$$\Sigma F_x = 0: \; N_{DE} + \frac{N_{CE}}{\sqrt{2}} - \frac{12\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 0$$

$$N_{DE} = 12 - \frac{N_{CE}}{\sqrt{2}} = \underline{24}$$

Knutepkt. C



$$\Sigma F_y = 0: \; \frac{N_{CD}}{\sqrt{2}} + \frac{N_{CE}}{\sqrt{2}} + 28 = 0$$

$$N_{CD} = -N_{CE} - 28\sqrt{2}$$

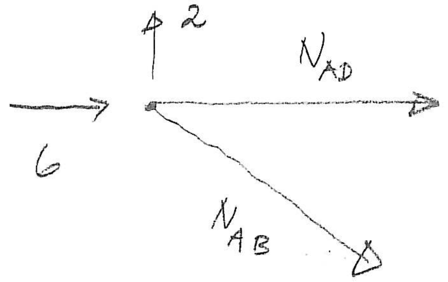
$$= +12\sqrt{2} - 28\sqrt{2} = \underline{-16\sqrt{2}}$$

$$\Sigma F_x = 0: \; N_{BC} + \frac{N_{CD}}{\sqrt{2}} - \frac{N_{CE}}{\sqrt{2}} = 0$$

$$N_{BC} = \frac{1}{\sqrt{2}}(N_{CE} - N_{CD}) =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(-12\sqrt{2} + 16\sqrt{2}) = \underline{4}$$

Knutepkt. A



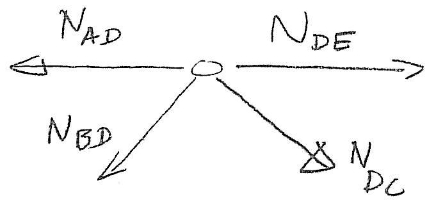
$$\Sigma F_y = 0: \quad 2 - \frac{N_{AB}}{\sqrt{2}} = 0$$

$$N_{AB} = \underline{2\sqrt{2}}$$

$$\Sigma F_x = 0: \quad 6 + N_{AD} + \frac{N_{AB}}{\sqrt{2}} = 0$$

$$N_{AD} = -6 - \frac{N_{AB}}{\sqrt{2}} = -6 - 2 = \underline{-8}$$

Knutepkt. D

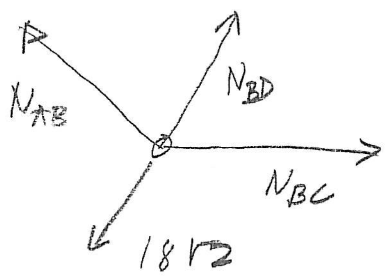


$$\Sigma F_y = 0: \quad \frac{(N_{BD} + N_{DC})}{\sqrt{2}} = 0 \Rightarrow N_{BD} = -N_{DC} = \underline{16\sqrt{2}}$$

Kontroll: $\Sigma F_x = 0: \quad N_{AD} - N_{DE} + \frac{N_{BD}}{\sqrt{2}} - \frac{N_{DC}}{\sqrt{2}} = 0$

$$-8 - 24 + 16 + 16 = 0 \qquad \underline{\text{ok!}}$$

Knutepkt. B som kontroll

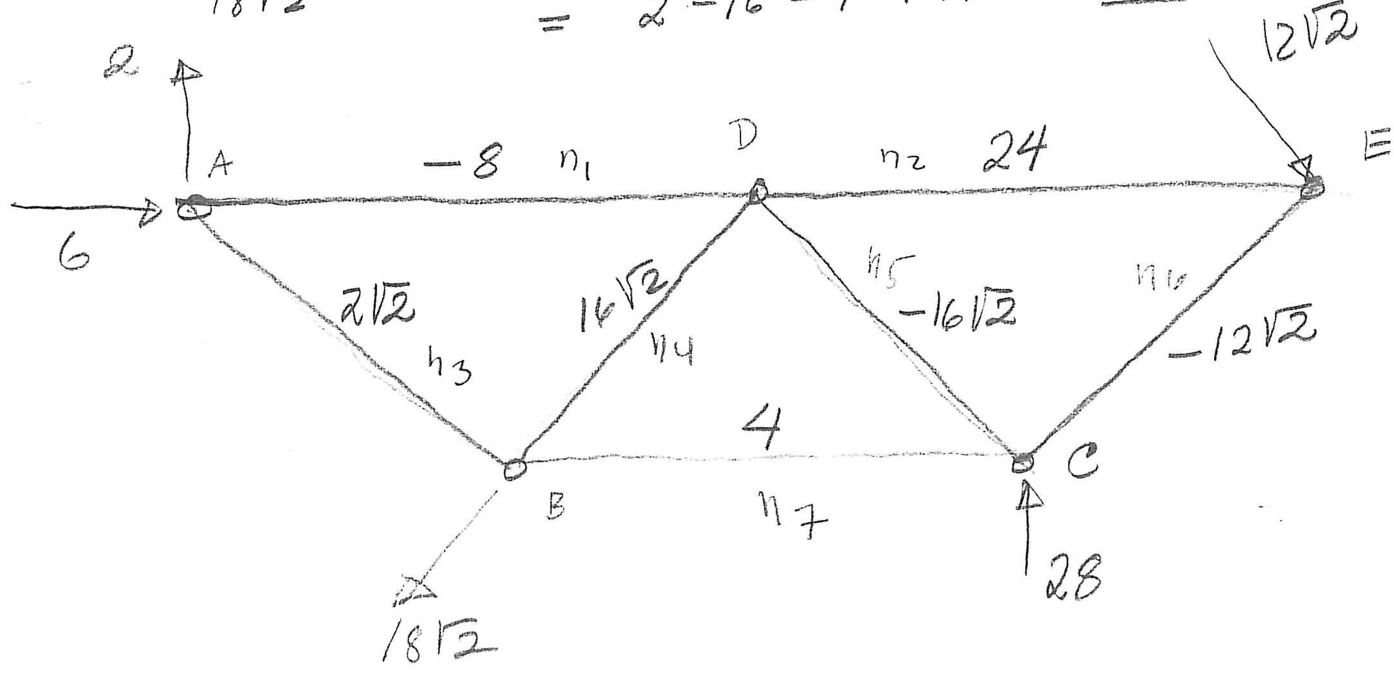


$$\Sigma F_x = 0:$$

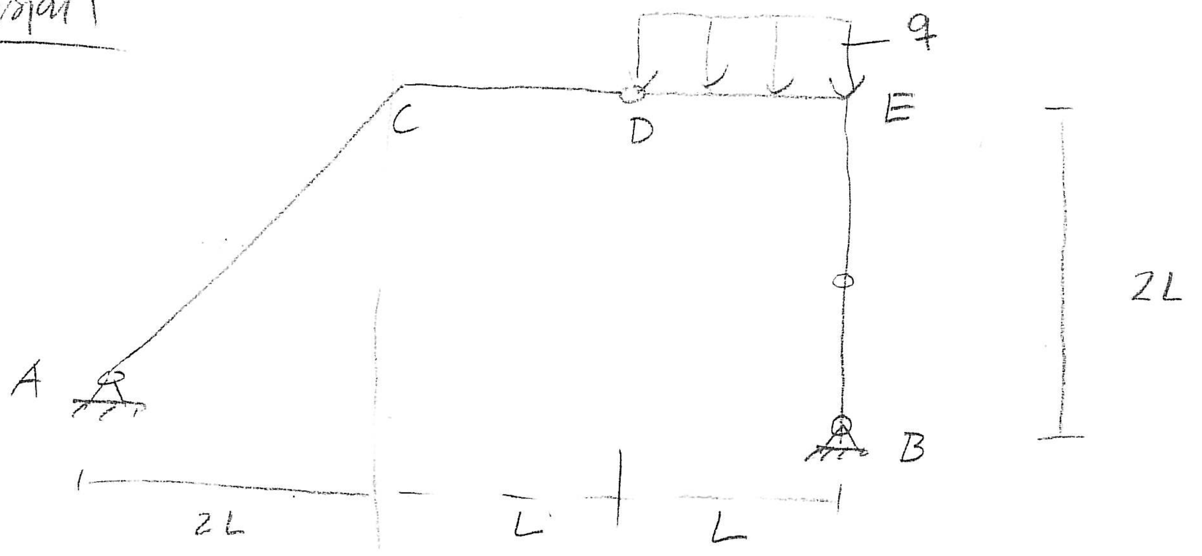
$$\frac{N_{AB}}{\sqrt{2}} - \frac{N_{BD}}{\sqrt{2}} - N_{BC} + \frac{18\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 0$$

$$\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} - \frac{16\sqrt{2}}{\sqrt{2}} - 4 + \frac{18\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

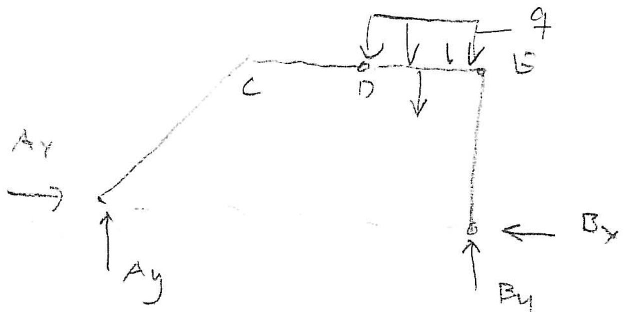
$$= 2 - 16 - 4 + 18 = \underline{\text{ok}}$$



Versjon 1



a) Global likevekt



$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow A_x = B_x$

$\Sigma F_y = 0 \; : \; A_y + B_y - q \cdot L = 0$

$\Rightarrow A_y + B_y = \underline{qL}$

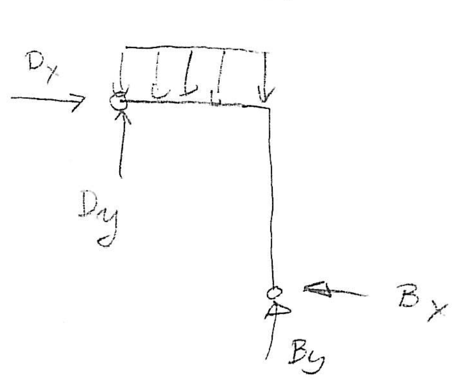
$\Sigma M_B = 0$:

$A_y \cdot 4L = q \cdot \frac{L^2}{2}$

$A_y = \boxed{\frac{qL}{8}}$

$\Rightarrow B_y = \frac{7}{8} qL$

Del DEBI



$\Sigma M_D = 0 : + B_y \cdot L = B_x \cdot 2L + q\frac{L^2}{2}$

$B_x \cdot 2L = B_y \cdot L - q\frac{L^2}{2}$

$2B_x = B_y - q\frac{L}{2}$

$B_x = \frac{B_y}{2} - q\frac{L}{4} = \left(\frac{7}{16} - \frac{1}{4}\right) qL$

$= \frac{3}{16} qL$

$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow D_x = \frac{3}{16} qL$

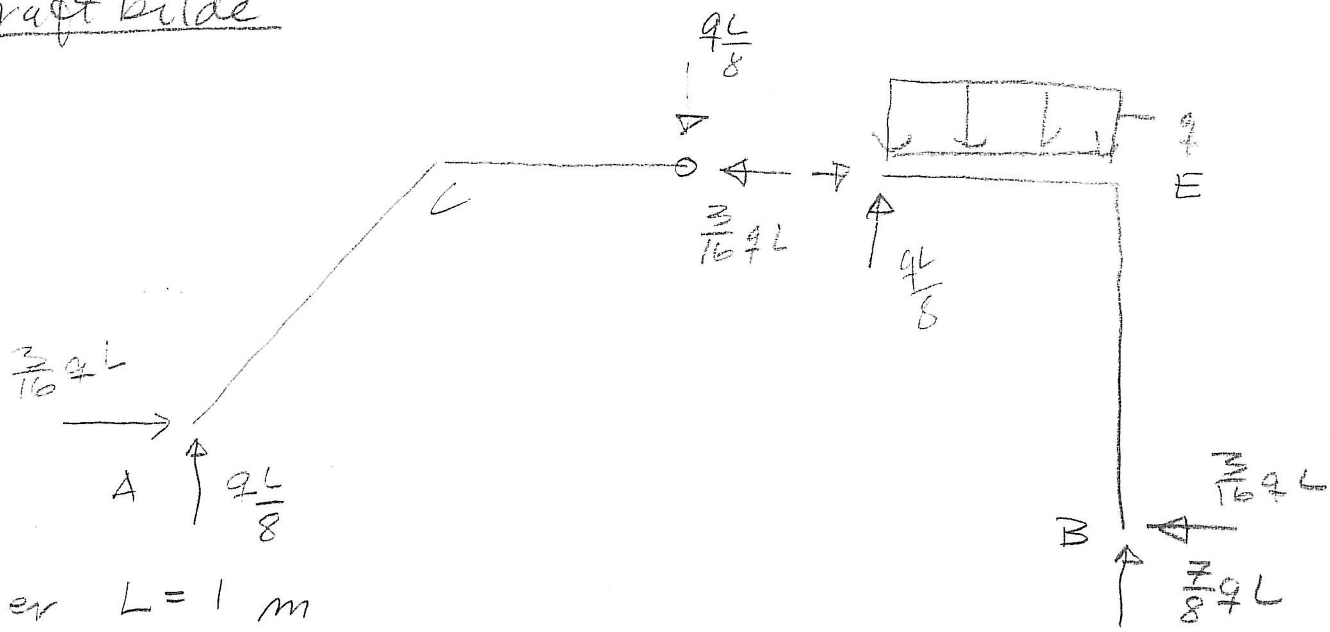
$\Rightarrow$: $\underline{A_x = B_x} = \frac{3}{16} qL$

$\Sigma F_y = 0$:

$D_y + B_y = qL$

$D_y = qL - \frac{7}{8} qL = \underline{\frac{qL}{8}}$

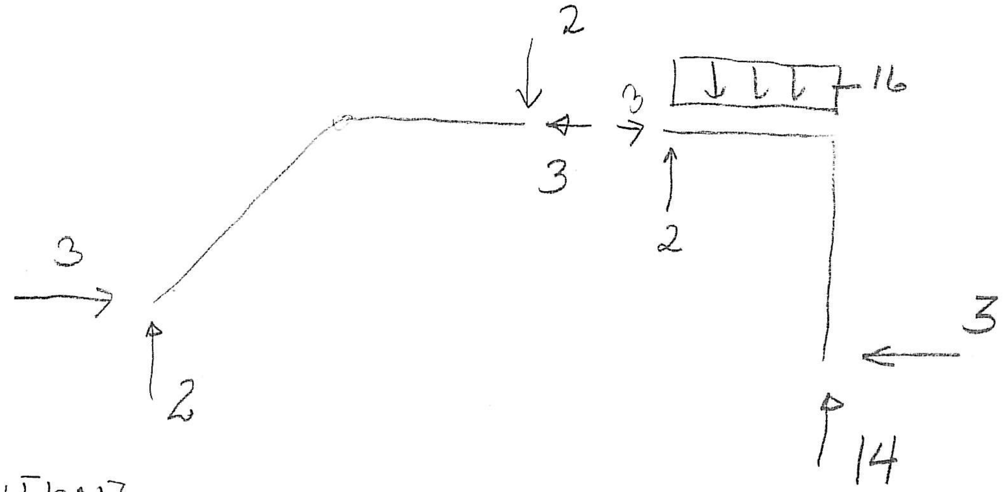
Kraftbilde



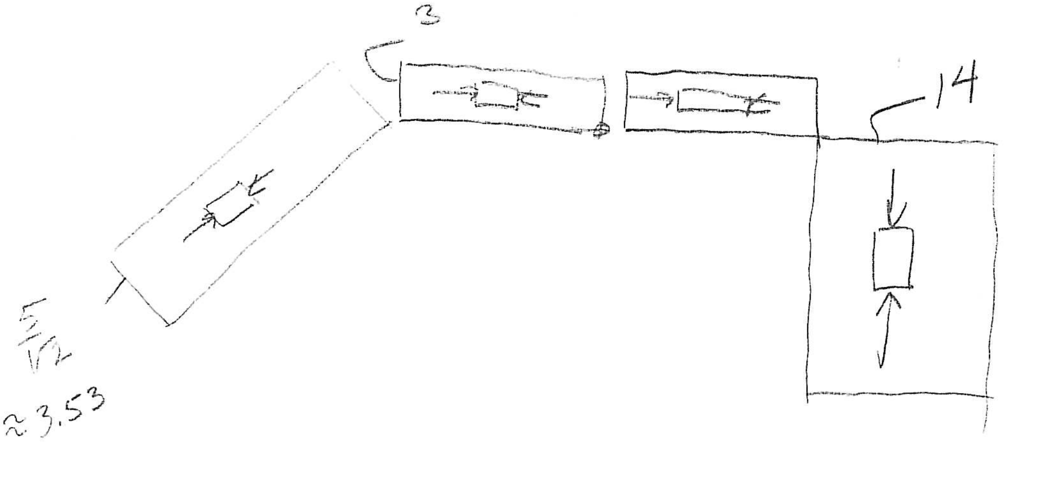
Velger $L = 1$ m

$q = 16$ kN/m

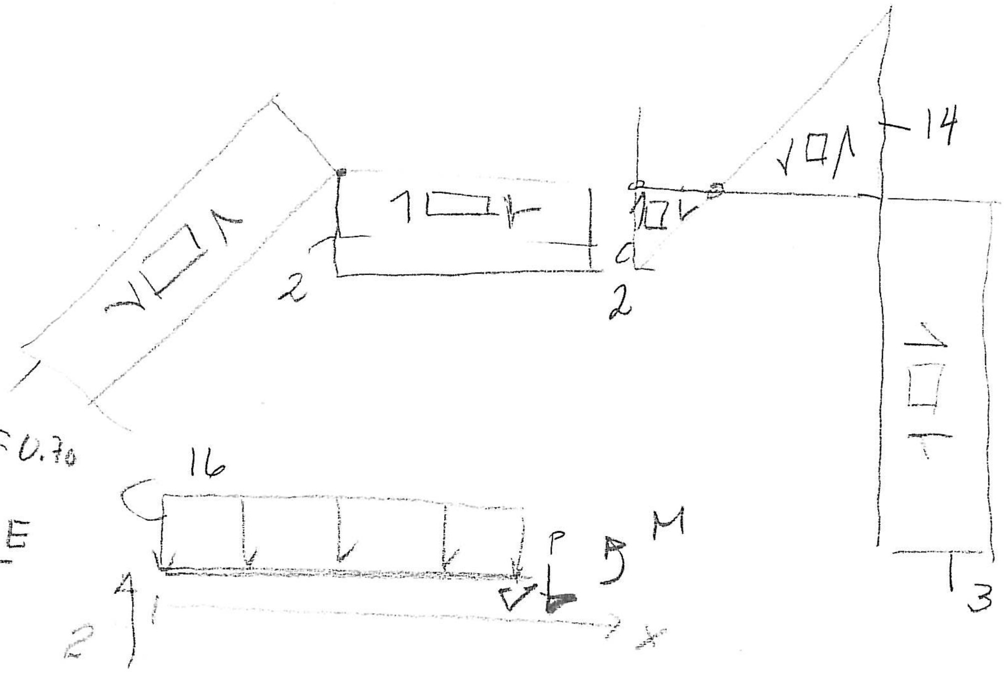
⇒



N[kN]



V [kN]



$$2 - 16x - V = 0 \Rightarrow V = 2 - 16x$$

$V = 0$ for $x = \frac{1}{8} \simeq 0.125\,m$

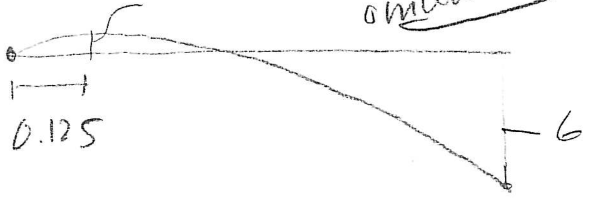
$\underline{V(1) = -14}$

$\underline{\Sigma M_P = 0:}$ $2 \cdot x - \frac{16x^2}{2} - M = 0$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow M = 2x - 8x^2 \\ M(0) = 0 \\ M(1) = 6 \end{array}\right\}$$

M_{max} for $x = \frac{1}{8}$ $= +\frac{1}{8}$
$= -0.125$

x	$-M$
0	0
0.1	−0.12
0.2	−0.08
0.3	+0.12
0.4	0.48
0.5	1.0
0.6	1.68

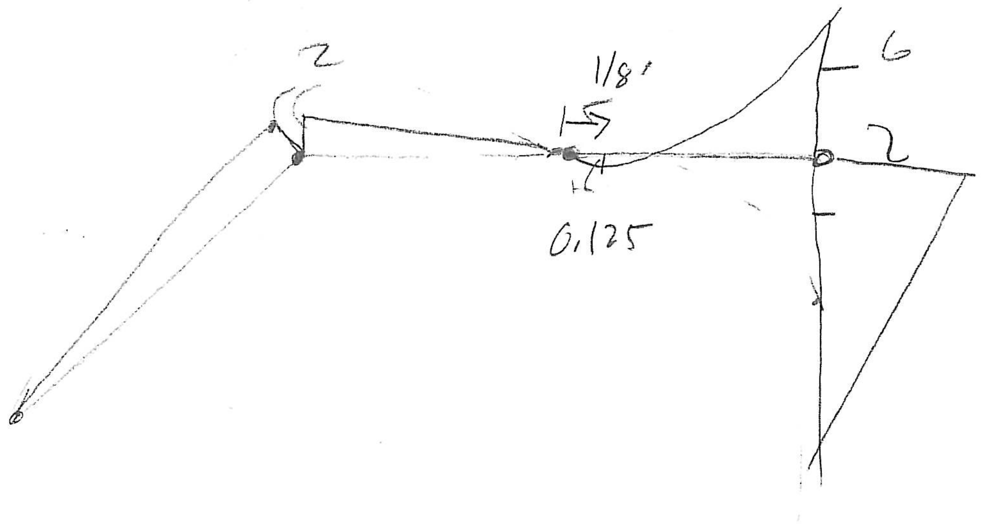


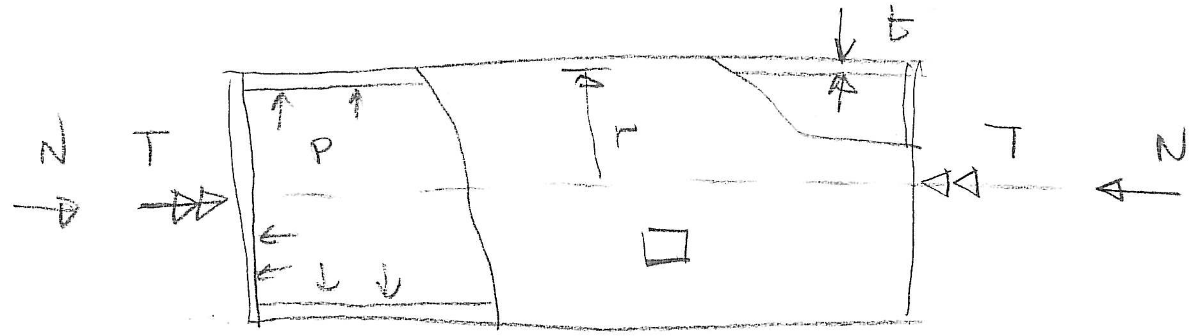
Oppgave 2

TKT 4126 - h08

(4)

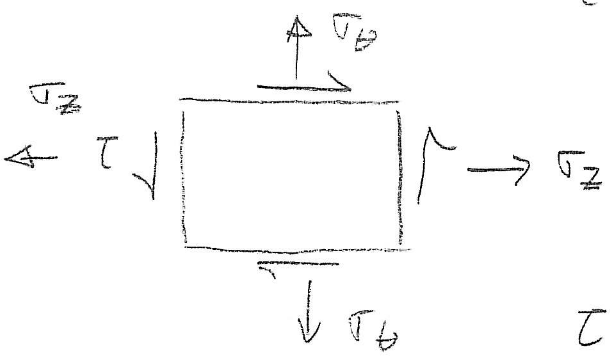
M [kNm]





$r = 100\ mm$, $t = 5mm$, $f_y = 260MPa$

a) Belastes med $p = 10MPa$ og $T = 20kNm$
Beregn spenningene som virker på et element i rørveggen.



$$\sigma_\theta = \frac{pr}{t} = 10 \cdot \frac{100}{5} = 200MPa$$

$$\sigma_z = \frac{\sigma_\theta}{2} = 100MPa$$

$$\tau = \frac{T}{2\pi r^2 t} = \frac{20 \cdot 10^{-3}}{2\pi (0.1)^2 5 \cdot 10^{-3}} = \frac{200}{\pi} = 63.7M\text{Pa} \approx 64MPa$$

b) Beregn hovedspenningene samt maksimal skjærspenning.

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_z + \sigma_\theta}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_\theta - \sigma_z}{2}\right)^2 + \tau^2} = \frac{3}{4}\sigma_\theta \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_\theta}{4}\right)^2 + \tau^2}$$

$$= 150 \pm \sqrt{2500 + \underset{4096}{4058}} = 150 \pm 80.98 \approx 150 \pm 81$$

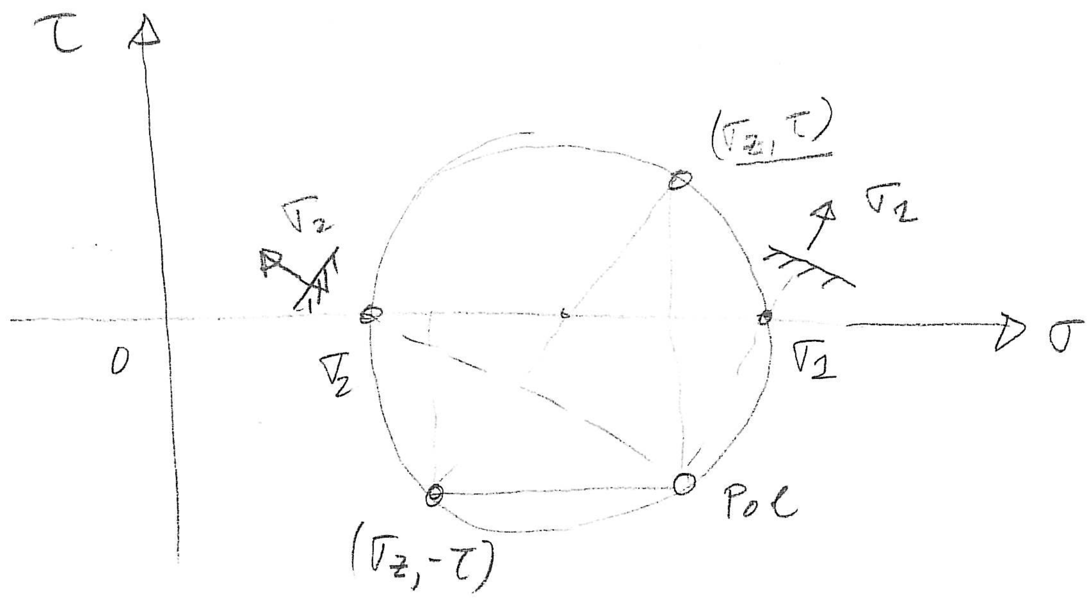
4053

$\supset$: $\sigma_1 = 231\ MPa$
$\sigma_2 = 69\ MPa$

$$\tau_{maks} = \frac{1}{2}(\sigma_{maks} - \sigma_{min}) =$$

$$\frac{1}{2}(\sigma_1 - 0) = 116MPa$$

c) Mohrs sirkel



d) Flytning etter 'Tresca-kriteriet.

Flytning når $\tau_{maks} = \frac{1}{2}(\sigma_{maks} - \sigma_{min}) = \frac{f_y}{2} = \underline{130}$

$\sigma_1 = 150 + \sqrt{2500 + \tau^2} = \sigma_{maks}$

$\sigma_2 = 150 - \sqrt{2500 + \tau^2}$ } $= \sigma_{min}$. ?

$\sigma_3 = 0$

Antar $\sigma_2 \geq 0$ (Naturlig fra Mohrs-sirkel)

Test: Grenseverdi: $\sigma_2 = 0 \Rightarrow \tau^2 + 2500 = 22500$

$\Rightarrow \tau = 100\sqrt{2} = 141 \text{MPa} > 130$

$\therefore$ σ_2 alltid > 0 $\therefore$ $\sigma_3 = 0 = \min$.

$\Rightarrow$ Flytning for $\sigma_1 = f_y = 260$

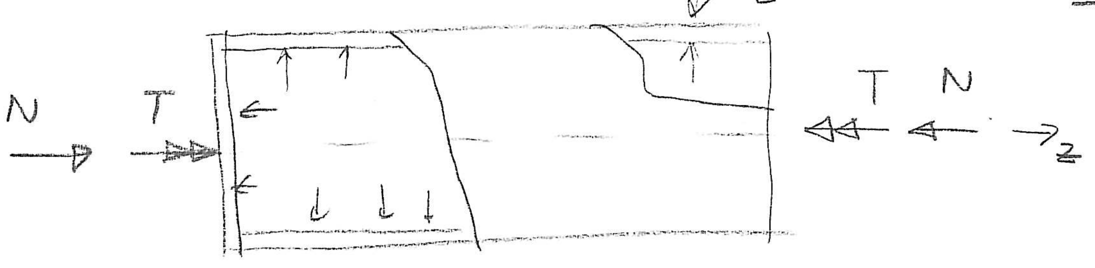
$150 + \sqrt{2500 + \tau^2} = 260 \Rightarrow \tau = \underline{98 \text{MPa}}$

$\Rightarrow T_f = 2\pi r^2 t \cdot \tau = 2\pi (0.1)^2 \cdot 5 \cdot 10^{-3} \cdot 98 = 0.03070 \text{MNm}$

$= \underline{\underline{31 \text{kNm}}}$

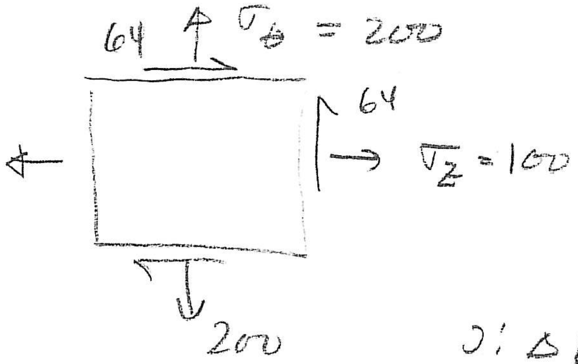
Oppgave 4 TKT 4126 - 408 (1)

$L = 1000\ mm$



Materialdata $E = 2 \cdot 10^5\ MPa$, $\nu = 0.3$

a) Bestem lengdeforandringen ΔL samt forandringen av tykkelsen Δt forårsaket av belastningen i oppgave 3, spørsmål a.



$$\varepsilon_z = \frac{\Delta L}{L} = \frac{1}{E}(\sigma_z - \nu\sigma_\theta)$$

$$= \frac{1}{E}(100 - 0{,}3 \cdot 200) = \frac{40}{E}$$

$$\therefore \Delta L = \frac{40}{E} \cdot L = \frac{40 \cdot 1000}{2 \cdot 10^5} = \underline{0.2\ mm}$$

$$\varepsilon_r = \varepsilon_t = \frac{\Delta t}{t} = \frac{1}{E}\left[\sigma_r - \nu(\sigma_\theta + \sigma_z)\right]$$

$$= -\frac{\nu(\sigma_z + \sigma_\theta)}{E} = \frac{-0.3 \cdot 300}{E} = -\frac{90}{E}$$

$$\therefore \Delta t = -\frac{90 \cdot 5}{2 \cdot 10^5} = \underline{-2.25 \cdot 10^{-3}\ mm}$$

b)

$$\frac{\Delta r}{r} = \frac{1}{E}(\sigma_\theta - \nu\sigma_z) = \frac{1}{E}\left[200 - 0.3 \cdot 100\right] = \frac{170}{E}$$

$$\therefore \Delta r = \frac{170}{E} \cdot r = \frac{170 \cdot 100}{2 \cdot 10^5} = \underline{0.085\ mm}$$

c)

$$\varepsilon_z = 0 \Rightarrow \sigma_z = \nu\sigma_\theta$$

$$\therefore \sigma_z = 0.3 \cdot 200 = 60\ MPa$$

Spenning pg.a δN: $\sigma_z^N = 60 - 100 = -40$

$$\Rightarrow N = \sigma_z^N \cdot A = -40 \cdot 2\pi r t = -0.1257\ MN = \approx \underline{-126\ kN}$$

Oppgave 4 TKT 4126-408 (2)

d) Flytning etter Mises-kriteriet.

$$\sigma_j = \sqrt{\sigma_z^2 + \sigma_\theta^2 - \sigma_z\sigma_\theta + 3\tau^2} = f_y$$

$\sigma_\theta = 200$

$\tau = 64$, $f_y = 260$ $\Big\}$ $\sigma_z = \underline{\sigma_z^N + 100} = \sigma + 100$

$\sigma_z^P = 100$

$$(\sigma + 100)^2 + 200^2 - (\sigma + 100)\cdot 200 + 3\cdot 64^2 = 260^2$$

$$\sigma^2 + 200\sigma + 10000 + 40000 - 200\sigma - 20000 + 12288 = 67600$$

$$\Rightarrow \sigma^2 - 25312 = 0$$

$$\sigma: \sigma_z^N = \pm 159 MPa$$

$$N_y = \sigma \cdot \underline{2\pi r t} = \sigma \cdot 2\pi \cdot 100 \cdot 5 = \pm 4.995 \cdot 10^5 N$$

$$= \pm \underline{500 \text{ kN}}$$

$\frac{N}{mm^2}$