NTNU
NORGES TEKNISK-NATURVITENSKAPLIGE UNIVERSITET
INSTITUTT FOR KONSTRUKSJONSTEKNIKK

BOKMÅL

EKSAMEN I FAG TKT4126 MEKANIKK

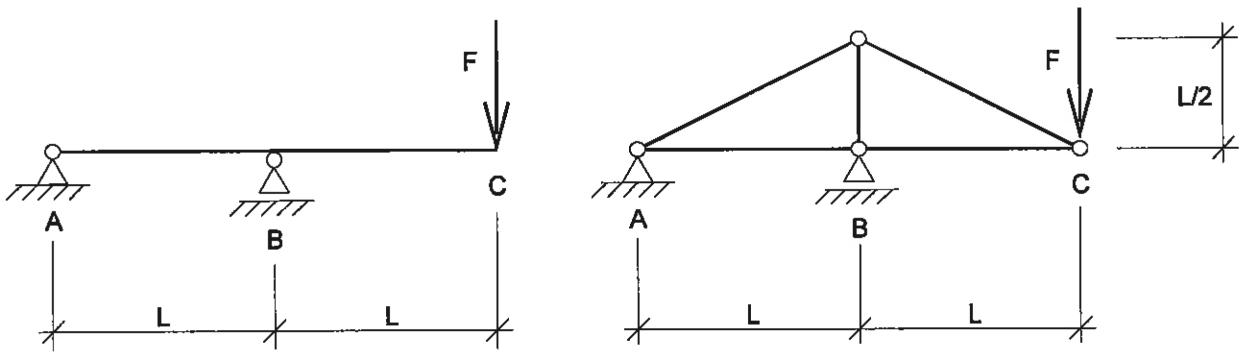
Onsdag 9. desember 2009, kl 0900 - 1300

Faglig kontakt under eksamen: Professor Einar Strømmen, tlf. 73594697 eller 41215460

Tillatte hjelpemidler: C Godkjent kalkulator
Rottmann: Matematisk formelsamling
Irgens: Formelsamling Mekanikk

Sensur: 6. januar 2010

Oppgave 1



a) Alt. 1: kontinuerlig bjelke *b) Alt. 2: fagverk*

Fig. 1

Fig. 1 viser to alternative utførelser av et bæresystem som er utsatt for punktlasten F på tuppen (i punkt C).

a) Beregn og tegn opp skjærkraft- og momentdiagram for den kontinuerlige bjelken i alternativ 1.

b) Beregn aksialkreftene i alle stavene for fagverket i alternativ 2.

Oppgave 2

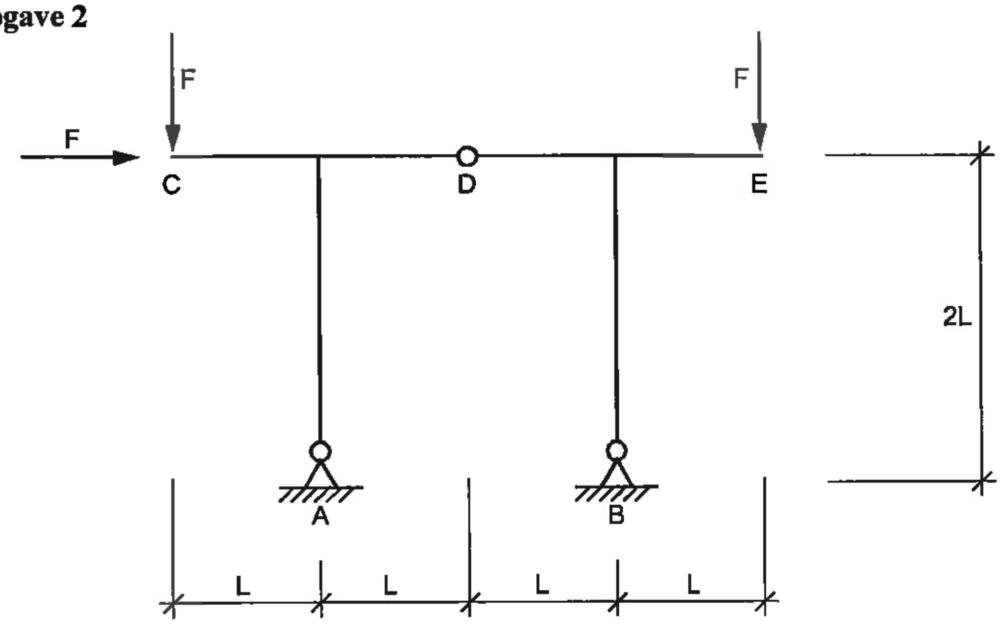


Fig. 2 Treleddsramme

Gitt en treleddsramme som vist i Fig. 2. Rammen er utsatt for vertikallasten F i punktene C og E samt en horisontallast med samme størrelse i punkt C.

a) Beregn opplagerkreftene i A og B samt leddkreftene i D.

b) Beregn og tegn opp moment-, skjærkraft- og aksialkraftdiagram for rammen.

Oppgave 3

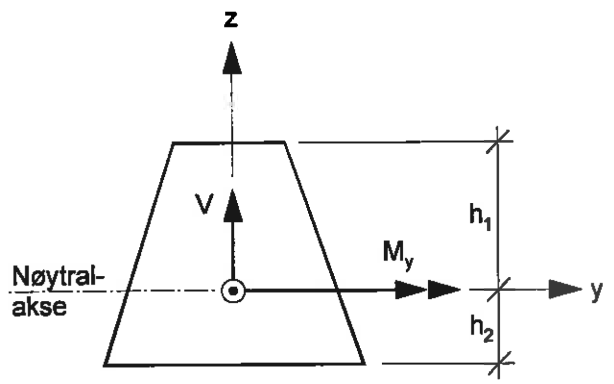


Fig. 3 Vilkårlig enkeltsymmetrisk tverrsnitt utsatt for bøyning og skjær

Gitt et vilkårlig enkeltsymmetrisk tverrsnitt som vist på Fig. 3 (symmetri om z-aksen). Tverrsnittet er utsatt for bøyning (M_y) og skjær (V). Generelt er bøye- og skjærspenningene gitt ved formlene

$$\sigma_x = \frac{M_y}{I_y} z \qquad \text{og} \qquad \tau_z = \frac{V}{bI_y} S_z$$

hvor: $I_y = \int_A z^2 dA$, $S_z = \int_{A_z} z dA$ og b er tverrsnittsbredden (på tvers av retningen til V).

a) Forklar hva som menes med tverrsnittets nøytralakse og vis at den er definert ved $\int_A z dA = 0$

b) Gi en fysisk forklaring på at $\tau_{xz} = 0$ i øvre og nedre ytterkanter av tverrsnittet, dvs. at $\tau_{xz} = 0$ når $z = h_1$ og $z = -h_2$.

Oppgave 4

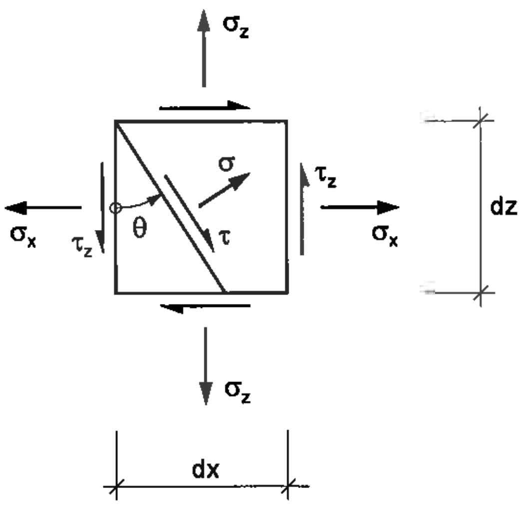


Fig. 4 Infinitesimalt element dx·dz utsatt for σ_x, σ_z og τ_{xz}

Gitt et materiale med elastisitetsmodul $E = 2 \cdot 10^5\ N/mm^2$, flytespenning $f_y = 200\ N/mm^2$ og tverrkontraksjonstall $\upsilon = 0.3$. I et bestemt punkt i materialet er spenningstilstanden gitt ved $\sigma_x = \sigma_z = 100\ N/mm^2$ og $\tau_{xz} = 50\ N/mm^2$.

a) Beregn tilhørende tøyninger ε_x, ε_z og γ_{xz}.

b) Beregn hovedspenninger og tilhørende hovedspenningsretninger.

c) Beregn sikkerheten mot materialflytning i henhold til von Mises flytekriterium.

Oppgave 5

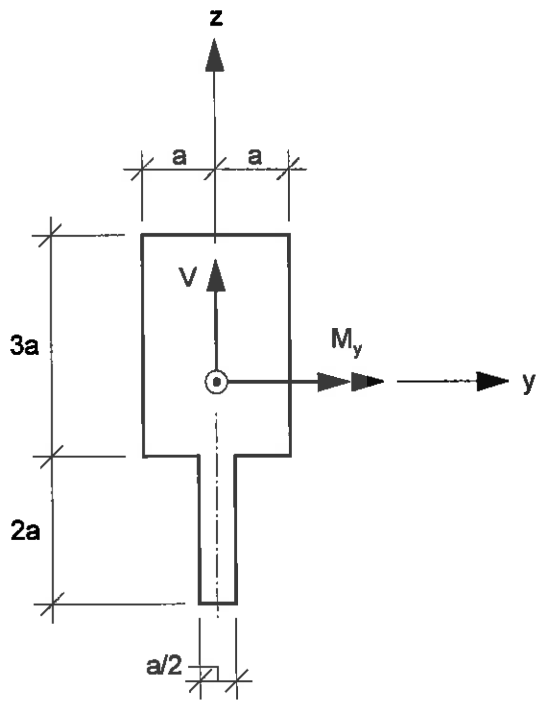


Fig. 5 Tverrsnitt sammensatt ev rektangulære deler

Gitt et tverrsnitt som vist i Fig. 5. Tverrsnittet er utsatt for et moment $M_y = 50\ kNm$ (og ingen skjærkraft, dvs. $V = 0$). Beregn hvor stor a må være for at materialets flytegrense $f_y = 200\ N/mm^2$ ikke skal overskrides på noe sted i tverrsnittet.

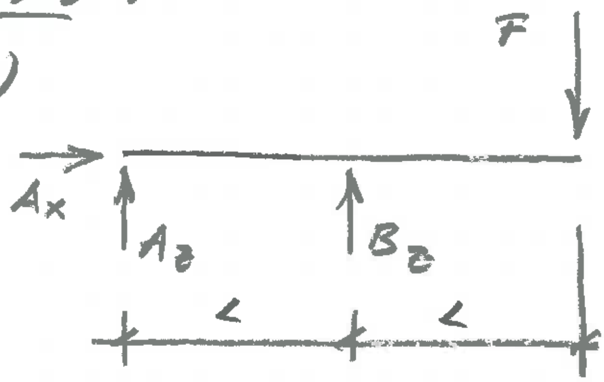
INSTITUTT FOR
KONSTRUKSJONSTEKNIKK
NTNU

TKT4126	DATO	SIDE 1/8
MEKANIKK	SIGN	

LØSNINGSFORSLAG TIL EKSAMEN 9.12.2009

Oppg. 1

a)



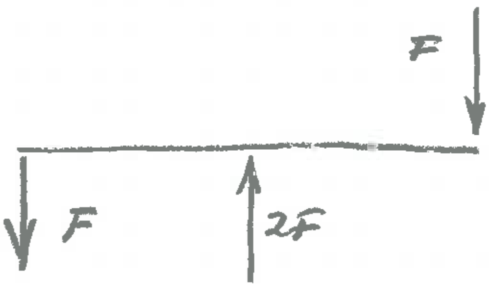
$$\Sigma M_A = 0: \quad F \cdot 2L - B_z L = 0$$

$$\Rightarrow B_z = 2F$$

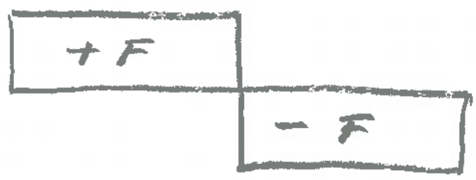
$$\Sigma F_z = 0: \quad A_z + B_z - F = 0$$

$$\Rightarrow A_z = -F$$

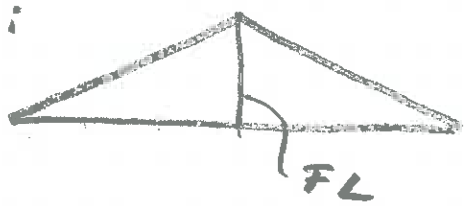
$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow A_x = 0$$



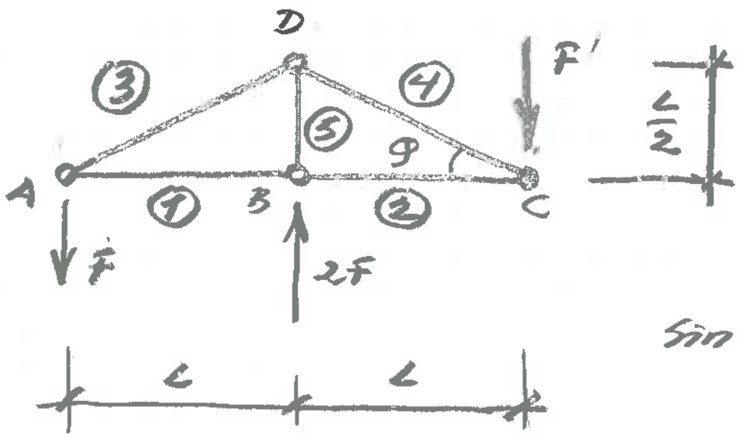
V:



M:



b)

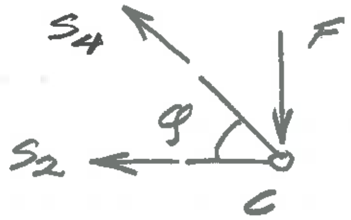


$$\sin\varphi = \frac{L/2}{\sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 + L^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\cos\varphi = \frac{L}{\sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 + L^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

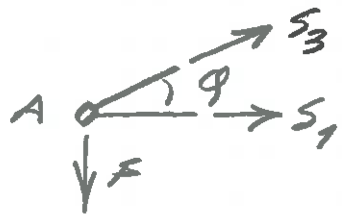
INSTITUTT FOR KONSTRUKSJONSTEKNIKK
NTNU

	DATO	SIDE 2
	SIGN	



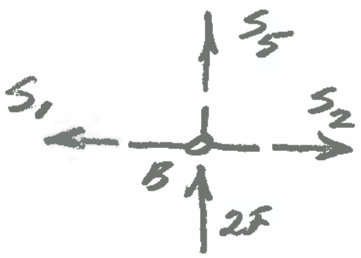
$$\Sigma F_z = 0: \; S_4 \sin\varphi - F = 0 \;\Rightarrow\; S_4 = \underline{\underline{F\sqrt{5}}}$$

$$\Sigma F_x = 0: \; -S_2 - S_4 \cos\varphi = 0 \;\Rightarrow\; S_2 = \underline{\underline{-2F}}$$



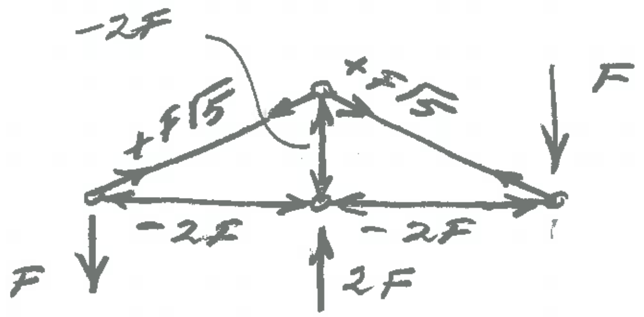
$$\Sigma F_z = 0: \; S_3 \sin\varphi - F = 0 \;\Rightarrow\; S_3 = \underline{\underline{F\sqrt{5}}}$$

$$\Sigma F_x = 0: \; S_1 + S_3 \cos\varphi = 0 \;\Rightarrow\; S_1 = \underline{\underline{-2F}}$$

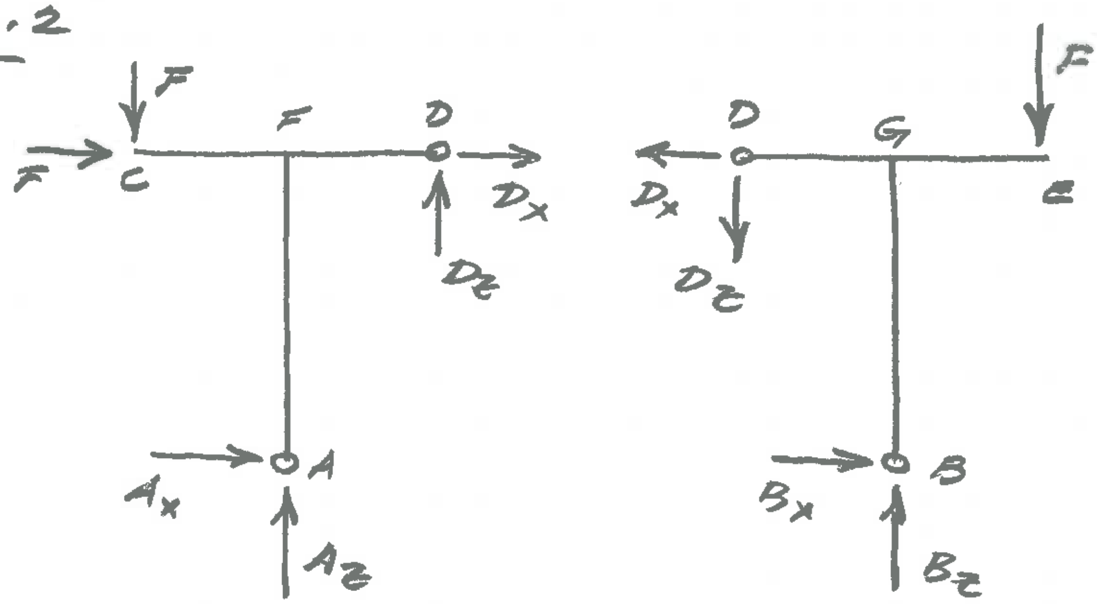


$$\Sigma F_z = 0: \; S_5 + 2F = 0 \;\Rightarrow\; S_5 = \underline{\underline{-2F}}$$

$$\Sigma F_x = 0: \; -S_1 + S_2 = 0 \;\Rightarrow\; S_1 = S_2 \quad \text{ok}$$



<u>Oppg. 2</u>



Venstre del: $\Sigma M_A = 0$:

1) $\Rightarrow F 2L - F \cdot L + D_x \cdot 2L - D_z \cdot L = 0 \Rightarrow 2D_x - D_z = -F$

Høyre del: $\Sigma M_B = 0$:

2) $\Rightarrow F \cdot L - D_x 2L - D_z L = 0 \rightarrow 2D_x + D_z = F$

1) + 2) $\Rightarrow 4D_x = 0 \Rightarrow \underline{\underline{D_x = 0}} \Rightarrow \underline{\underline{D_z = F}}$

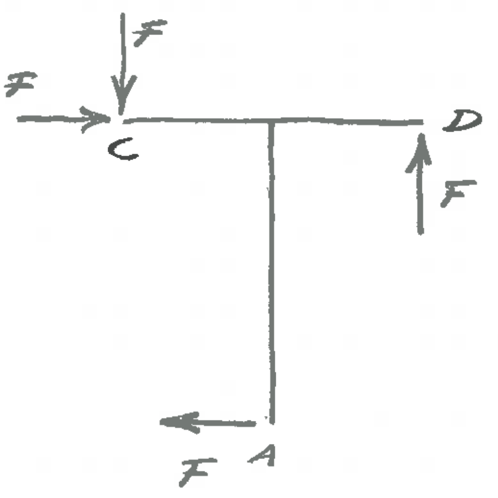
Venstre del:

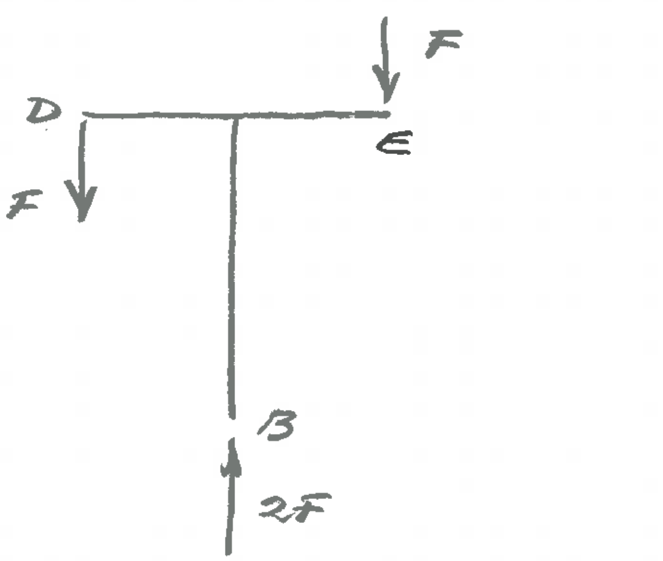
$\Sigma F_x = 0$: $A_x + F = 0 \Rightarrow A_x = \underline{\underline{-F}}$

$\Sigma F_z = 0$: $A_z + D_z - F = 0 \Rightarrow A_z = \underline{\underline{0}}$

Høyre del:

$\Sigma F_x = 0$: $B_x = \underline{\underline{0}}$, $\Sigma F_z = 0$: $B_z - D_z - F = 0 \Rightarrow B_z = \underline{\underline{2F}}$





Aksiallastdiagram:

Skjærkraftdiagram:

Momentdiagram:

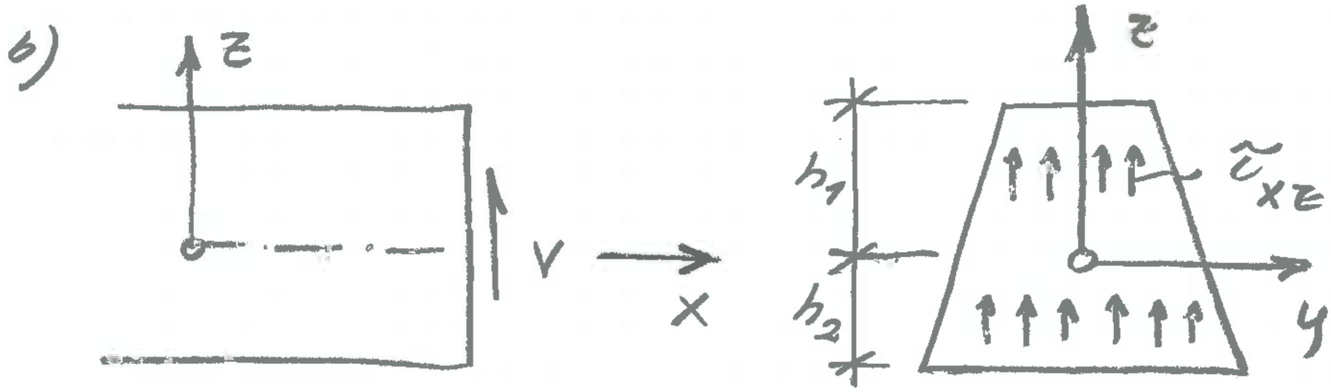
Oppg. 3

a) Nøytralakse def. ved den akse hvor σ_x (og ε_x) $= 0$ når $M_y \neq 0$ og $N = 0$.

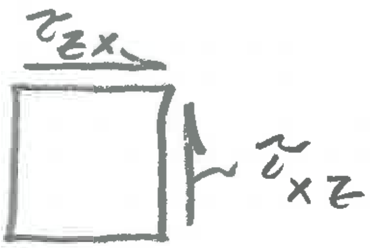
$$N = \int_A \sigma_x \, dA = \int_A \frac{M_y}{I_y} z \, dA = \frac{M_y}{I_y} \int_A z \, dA = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_A z \, dA = 0} \quad \text{når} \quad \begin{cases} M_y \neq 0 \\ N = 0 \end{cases}$$

b)



Skjærspenningenes parvise opptreden:



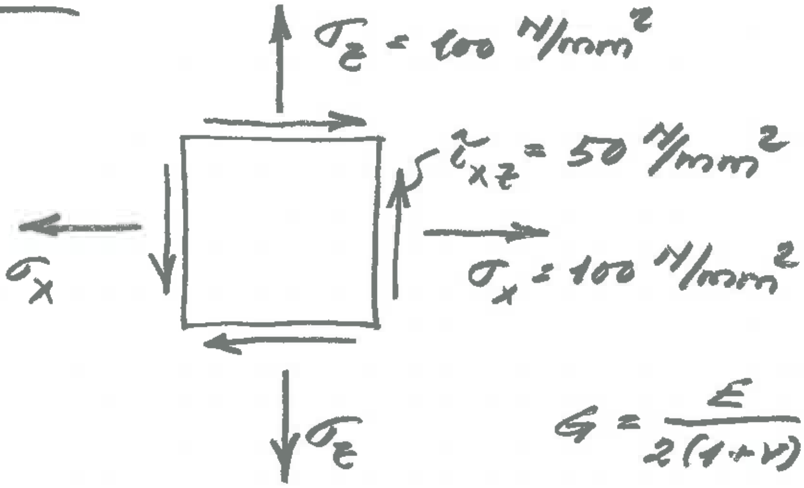
$$\boxed{\tau_{xz} = \tau_{zx}}$$

$$\left.\begin{array}{l} \tau_{zx}(z = h_1) \\ \tau_{zx}(z = -h_2) \end{array}\right\} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \tau_{xz}(z = h_1) = 0 \\ \tau_{xz}(z = -h_2) = 0 \end{cases}$$

INSTITUTT FOR KONSTRUKSJONSTEKNIKK
NTNU

	DATO	SIDE
		6
	SIGN	

Oppg. 4



$E = 2 \cdot 10^5\ N/mm^2$

$f_y = 200$ — " —

$\nu = 0{,}3$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{2 \cdot 10^5}{2(1+0{,}3)} = \underline{0{,}77 \cdot 10^5}\ \frac{N}{mm^2}$$

a)

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_z) = \frac{100(1-0{,}3)}{2 \cdot 10^5} = \underline{\underline{3{,}5 \cdot 10^{-4}}}$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}(\sigma_z - \nu\sigma_x) = \text{— " —} = \underline{\underline{3{,}5 \cdot 10^{-4}}}$$

$$\gamma_{xz} = \frac{1}{G} \cdot \tau_{xz} = \frac{50}{0{,}77 \cdot 10^5} = \underline{\underline{6{,}5 \cdot 10^{-4}}}$$

b)

$$\left.\begin{matrix}\sigma_1 \\ \sigma_2\end{matrix}\right\} = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{xz}^2}$$

$$= \frac{100+100}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{100-100}{2}\right)^2 + 50^2} = 100 \pm 50$$

$$\Rightarrow \sigma_1 = \underline{\underline{150}}\ N/mm^2 \quad \& \quad \sigma_2 = \underline{\underline{50}}\ N/mm^2$$

$$\tan 2\varphi = \frac{\tau_{xz}}{\sigma_x - \sigma_z} = \frac{50}{100-100} = \infty \Rightarrow 2\varphi = 90$$

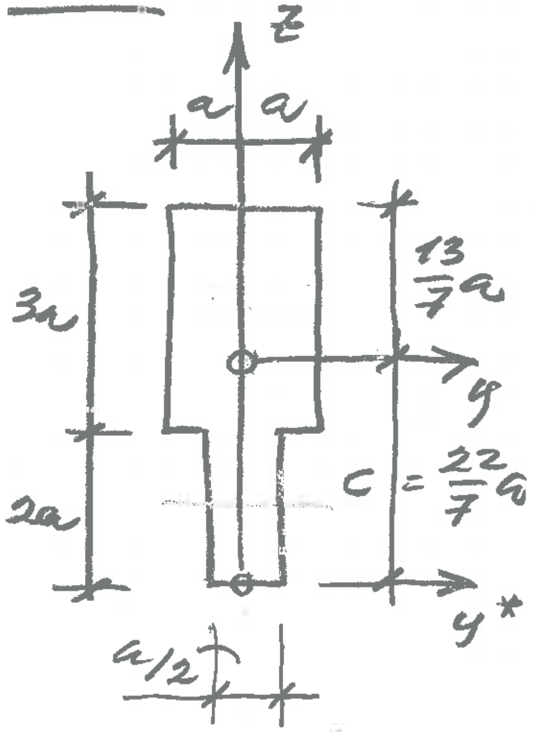
$\Rightarrow \varphi_1 = \underline{\underline{45°}}$ & $\varphi_2 = \varphi_1 + 90° = \underline{\underline{135°}}$

c) von mises: $\sigma_j = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2}$, $\gamma\sigma_j = f_y$

$\sigma_j = \sqrt{150^2 + 50^2 - 100 \cdot 50} = 132\ N/mm^2$

$\Rightarrow \gamma = \frac{f_y}{\sigma_j} = \frac{200}{132} = \underline{\underline{1{,}51}}$

Oppg. 5



$A = 3a \cdot 2a + 2a\frac{a}{2} = 7a^2$

$c = \frac{2a\frac{a}{2} \cdot a + 3a \cdot 2a \cdot 3{,}5a}{7a^2} = \frac{22}{7}a$

$I_y = \frac{(2a)\cdot(3a)^3}{12} + 6a^2\left(\frac{13}{7}a - \frac{3}{2}a\right)^2$

$+ \frac{\frac{a}{2}(2a)^3}{12} + a^2\left(\frac{22}{7}a - a\right)^2$

$= \left(\frac{9}{2} + \frac{75}{98} + \frac{1}{3} + \frac{225}{49}\right)a^4$

$\Rightarrow I_y = (4.5 + 0.765 + 0.333 + 4.592)\,a^4$

$\Rightarrow I_y = \underline{\underline{10.19\,a^4}}$

$$\sigma_x = \frac{M}{I_y} z \Rightarrow \begin{cases} \sigma_x(\text{overkant}) = \frac{M_y}{I_y} \cdot \frac{13}{7} a \\ \sigma_x(\text{underkant}) = \frac{M_y}{I_y}\left(-\frac{22}{7} a\right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{M}{I_y} \cdot \frac{22}{7} a \leq f_y$$

$$\text{i}: \frac{M_y}{10.19 a^{4}} \cdot \frac{22}{7} a = \frac{0.308}{a^3} M_y \leq f_y$$

$$\Rightarrow a \geq \left(\frac{0.308}{f_y} M_y\right)^{1/3} = \left(\frac{0.308 \cdot 50 \cdot 10^6}{200}\right)^{1/3}$$

$$\Rightarrow a \geq \underline{\underline{42.5 \text{ mm}}}$$

TeTo Grafiske • 73 90 23 11