Fagleg kontakt under eksamen: Leif Rune Hellevik
Tlf.: (735)94535

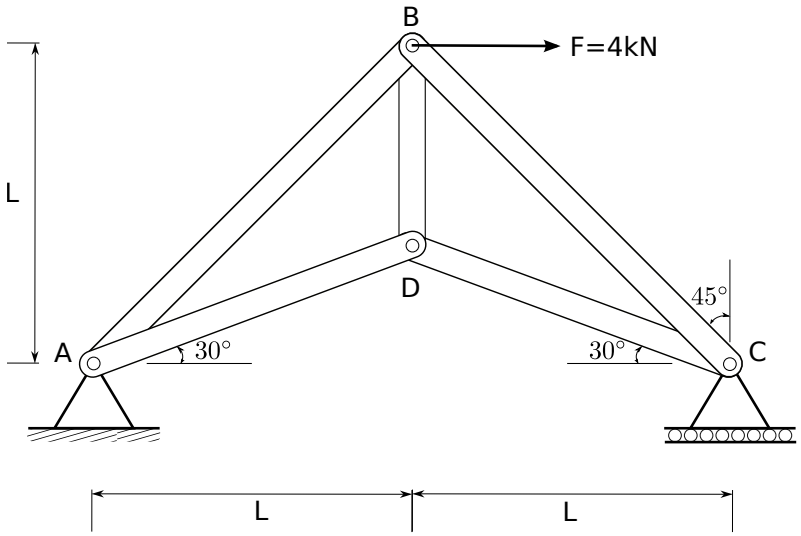
EKSAMEN I FAG TKT4126 MEKANIKK

Fredag 3. desember 2010
Tid: kl. 09.00-13.00

Godkjende hjelpemiddel: C - Godkjend kalkulator
Rottmann : Matematisk formelsamling.
Irgens : Formelsamling Mekanikk

Språkform: Nynorsk
Sensurfrist: 3. januar 2011

Oppgave 1 (33%)
Figur 1 viser eit fagverk gjort fast med eit boltelager i A og eit glidelager i C. Retningane på dei ulike bjelkane går fram av figuren og geometrien er gitt ved ei generell lengde L. Fagverket er utsett for ei kraft F i B som verkar horisontalt som vist på figuren.



Figur 1: Fagverk med last F.

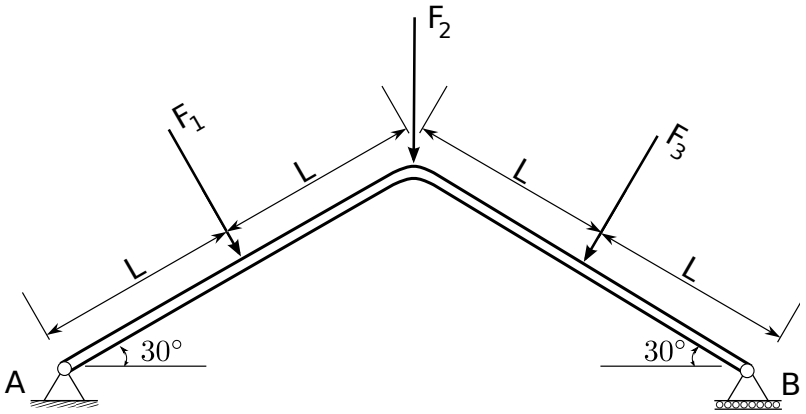
a) Vis at fagverket er statisk bestemt og finn opplagerreaksjonane i A og C.

b) Finn alle stavkreftene og illustrer strekk- og trykkstavar.

c) Finn stavkrafta i BD-bjelka dersom vinklane mellom horisontalplanet og bjelkane CD og AD blir endra frå 30° til 0°. Resten av konstruksjonen er som før.

Oppgave 2 (33%)

Figur 2 viser ei ramme gjort fast med eit boltelager i A og eit glidelager i B som er utsett for punktlastene $F_1 = 800\,\text{kN}$, $F_2 = 700\,\text{kN}$ og $F_3 = 600\,\text{kN}$. Du kan bruka $L = 1\,\text{m}$.



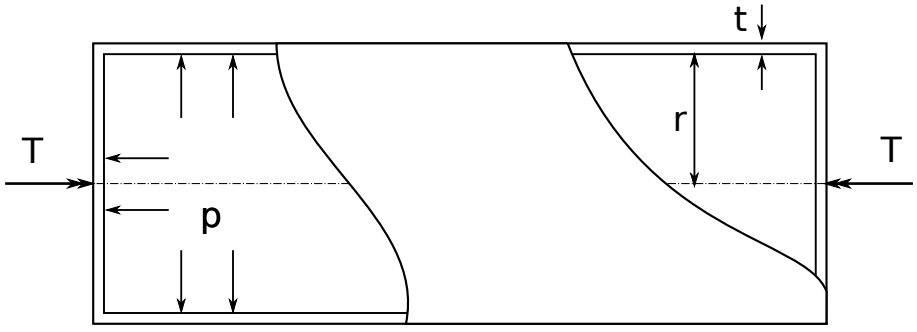
Figur 2: Ramme med last F_1, F_2 og F_3.

a) Vis at ramma er statisk bestemt og finn opplagerreaksjonane i A og B.

b) Rekn ut og teikn moment-, skjær- og aksialkraftdiagram for ramma. Sett på storleikar og verknadssymbol på diagramma. (Om momentdiagrammet blir teikna på strekksida kan ein sløyfe verknadssymbola).

Oppgave 3 (33%)

Figur 3 viser eit lukka, tynnvegga, sirkulært røyr med radius $r = 250\,\text{mm}$ og veggtverrmål $t = 25\,\text{mm}$. Materialet (dvs. E-modul og ν) er ukjent. Røyret er utsett for eit indre trykk $p = 10.1\,\text{MPa}$ og eit torsjonsmoment $T = 18.75\,\text{kNm}$.



Figur 3: Lukka, tynnvegga, sirkulært røyr med last p og T.

Legg til grunn plan spenningsstilstand og la x og y vera koordinatar i aksiell retning og ringretning. På overflata av røyret er det festa ein 45°-90°-strekklapprosett som ein har målt følgjande tøyingar med:

$$\epsilon_x = 150 \cdot 10^{-6}, \quad \epsilon_y = 825 \cdot 10^{-6}, \quad \epsilon_{45} = 513 \cdot 10^{-6}$$

a) Finn skjærtøyinga γ_{xy} frå målingane.

b) Finn skjærmodulen G til materialet.

c) Finn spenningane σ_x og σ_y, i aksiell retning og ringretning, basert på likevekt.

d) Finn tverrkontraksjonstalet ν og E-modulen frå formlane for skjærmodul

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

og plan spenning for eit Hooke-materiale. Kva for materiale er røyret laga av? Sjå vedlegg for liste over materialeigenskapar til ulike material.

Average Mechanical Properties of Typical Engineering Materials[a]
(SI Units)

Materials	Density ρ (Mg/m^3)	Modulus of Elasticity E (GPa)	Modulus of Rigidity G (GPa)	Yield Strength (MPa) σ_Y Tens.	Comp.[b]	Shear	Ultimate Strength (MPa) σ_u Tens.	Comp.[b]	Shear	% Elongation in 50 mm specimen	Poisson's Ratio ν	Coef. of Therm. Expansion α (10^{-6})/°C
Metallic												
Aluminum Wrought Alloys — 2014-T6	2.79	73.1		414	414	172	469	469	290	10	0.35	23
Aluminum Wrought Alloys — 6061-T6	2.71	68.9		255	255	131	290	290	186	12	0.35	24
Cast Iron Alloys — Gray ASTM 20	7.19	67.0		–	–	–	179	669	–	0.6	0.28	12
Cast Iron Alloys — Malleable ASTM A-197	7.28	172		–	–	–	276	572	–	5	0.28	12
Copper Alloys — Red Brass C83400	8.74	101		70.0	70.0	–	241	241	–	35	0.35	18
Copper Alloys — Bronze C86100	8.83	103		345	345	–	655	655	–	20	0.34	17
Magnesium Alloy [Am 1004-T61]	1.83	44.7		152	152	–	276	276	152	1	0.30	26
Steel Alloys — Structural A36	7.85	200		250	250	–	400	400	–	30	0.32	12
Steel Alloys — Stainless 304	7.86	193		207	207	–	517	517	–	40	0.27	17
Steel Alloys — Tool L2	8.16	200		703	703	–	800	800	–	22	0.32	12
Titanium Alloy [Ti-6Al-4V]	4.43	120		924	924	–	1,000	1,000	–	16	0.36	9.4
Nonmetallic												
Concrete — Low Strength	2.38	22.1	–	–	–	12	–	–	–	–	0.15	11
Concrete — High Strength	2.38	29.0	–	–	–	38	–	–	–	–	0.15	11
Plastic Reinforced — Kevlar 49	1.45	131	–	–	–	–	717	483	20.3	2.8	0.34	–
Plastic Reinforced — 30% Glass	1.45	72.4	–	–	–	–	90	131	–	–	0.34	–
Wood Select Structural Grade — Douglas Fir	0.47	13.1	–	–	–	–	2.1[c]	26[d]	6.2[d]	–	0.29[e]	–
Wood Select Structural Grade — White Spruce	3.60	9.65	–	–	–	–	2.5[c]	36[d]	6.7[d]	–	0.31[e]	–

[a] Specific values may vary for a particular material due to alloy or mineral composition, mechanical working of the specimen, or heat treatment. For a more exact value reference books for the material should be consulted.

[b] The yield and ultimate strengths for ductile materials can be assumed equal for both tension and compression.

[c] Measured perpendicular to the grain.

[d] Measured parallel to the grain.

[e] Deformation measured perpendicular to the grain when the load is applied along the grain.

LT eksamen 8/12 2010 TKT4126 Mekanikk

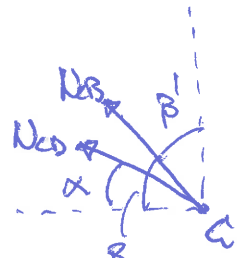
Oppg 1 (a) $k=4$, $s=5$ og $r=3$ $\Rightarrow 2k = s+r \Rightarrow$ Statisk bestemt.

Reaksjoner:

$\Sigma M_A = 0$: $C_y \cdot 2k - Fk = 0 \Rightarrow C_y = \frac{F}{2} = 2kN$

$\Sigma F_x = 0$: $A_x = F = 4kN$, $\Sigma F_y = 0 \Rightarrow A_y = C_y$

b) Stavkrefter:



$\alpha = 30$, $\beta' = 45$

$\beta = 90 - 45 = 45$

Knutepkt C:

$\Sigma F_x = 0$: $N_{CD}\cos\alpha + N_{CB}\cos\beta = 0$

$\Rightarrow N_{CD} = -\frac{N_{CB}\,2}{\sqrt{2}\sqrt{3}}$ $\Leftarrow \cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\Sigma F_y = 0$:

$C_y + N_{CD}\sin\alpha + N_{CB}\sin\beta = 0$

m/ $C_y = F/2$ og $N_{CD} = -\frac{N_{CB}\,2}{\sqrt{2}\sqrt{3}}$, $\sin\alpha = \frac{1}{2}$, $\sin\beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$

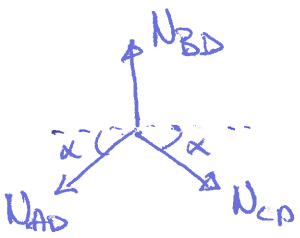
$\Rightarrow \frac{F}{2} + N_{CB}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\frac{2}{\sqrt{2}\sqrt{3}}\right) = 0$

$\Rightarrow N_{CB}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{6}}\right) = -\frac{F}{2}$

$N_{CB} = \frac{-\sqrt{6}}{\sqrt{3}-1}\frac{F}{2} = -6.7\,kN$

$N_{CD} = -\frac{N_{CB}\,2}{\sqrt{6}} = \frac{F}{2}\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}-1}\frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{F}{\sqrt{3}-1} = 5.46\,kN$

Kp. D:



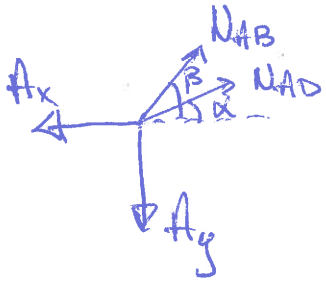
$\Sigma F_x = 0$: $N_{AD}\cos\alpha = N_{CD}\cos\alpha$

$\Rightarrow N_{AD} = N_{CD} = \frac{F}{\sqrt{3}-1} = 5{,}46\,kN$

$\Sigma F_y = 0$:

$N_{BD} = 2 \cdot N_{AD} \cdot \sin\alpha = N_{AD} = N_{CD} = \frac{F}{\sqrt{3}-1} = 5.46\,kN$

Kp. A:



$\Sigma F_y = 0$: $N_{AB}\sin\beta + N_{AD}\sin\alpha = A_y = \frac{F}{2}$

$\Rightarrow \frac{N_{AB}}{\sqrt{2}} + \frac{N_{AD}}{2} = \frac{F}{2}$, $N_{AD} = \frac{F}{\sqrt{3}-1}$

$\Rightarrow \frac{N_{AB}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\left(F - N_{AD}\right) = \frac{F}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}-1}\right)$

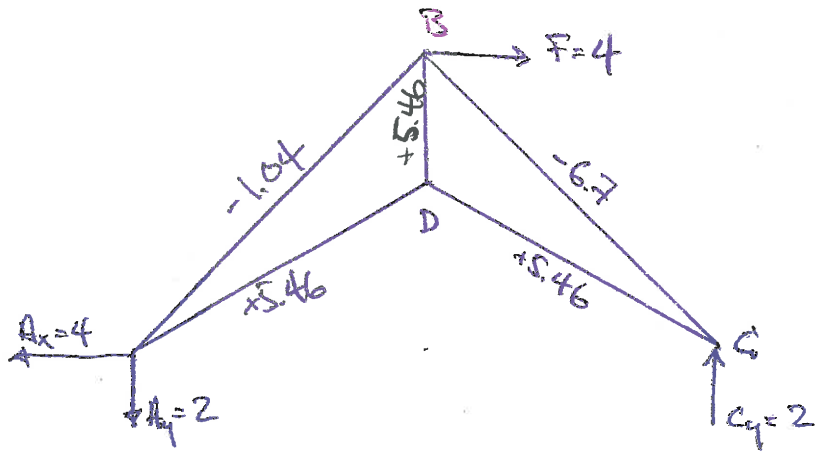
$\Rightarrow N_{AB} = \frac{\sqrt{2}}{2} F \frac{\sqrt{3}-2}{\sqrt{3}-1} = -\frac{F}{\sqrt{2}} \frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} = -1{,}04$

c) Frå b) i Kp. D:

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N_{BD} = 2 N_{AD}\sin\alpha$

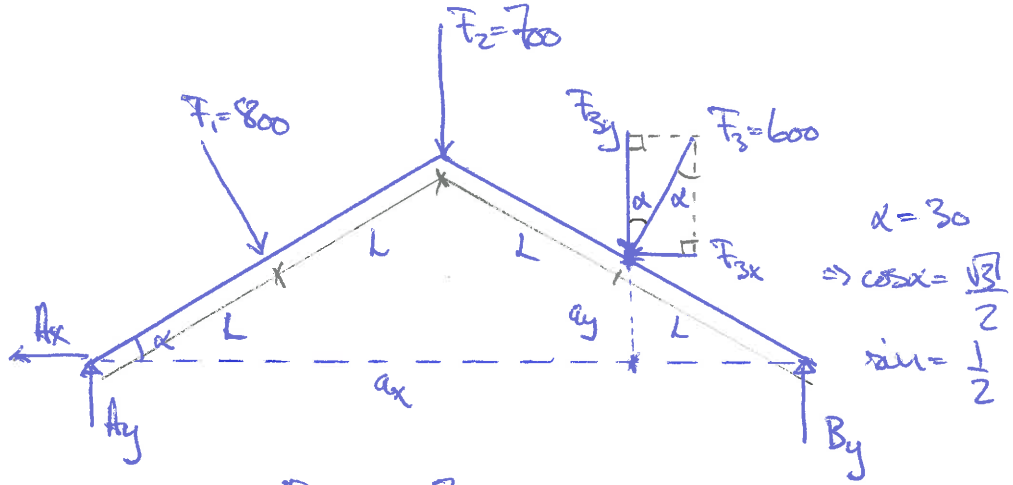
m/ $\alpha = 0 \Rightarrow \sin\alpha = 0 \Rightarrow N_{BD} = 0$

dvs. N_{BD} blir ein nullstav når $\alpha = 0$.



Opg. 2

a) Statisk bestemt? 3 LVL for bjelka = 3 ukjente ⇒ OK!



Dekomponer $F_3 = [F_{3x}, F_{3y}]$ m/ armar a_y og a_x:

$a_x = 4L\cos\alpha - L\cos\alpha = 3L\cos\alpha$, $a_y = L\sin\alpha$

$F_{3x} = F_3 \sin\alpha$, $F_{3y} = F_3 \cos\alpha$

$\Sigma M_A = 0$:

$$B_y 2 \cdot 2L\cos\alpha - F_2 2L\cos\alpha - F_1 L - F_{3y} a_x + F_{3x} a_y = 0$$

$$\Rightarrow 4B_y\cos\alpha - 2F_2\cos\alpha - F_1 - 3F_3\cos^2\alpha + F_3\sin^2\alpha = 0$$

$$\Rightarrow B_y = \frac{2F_2\cos\alpha + F_1 + F_3(3\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)}{4\cos\alpha}$$

$$= \frac{2F_2\sqrt{3}/2 + F_1 + F_3(3\cdot 3/4 - 1/4)}{4\cdot\sqrt{3}/2}$$

$$B_y = \frac{F_1 + \sqrt{3}F_2 + 2F_3}{2\sqrt{3}} = \underline{927\,kN}$$

Oppg. 2

a) (forkl).

$$\Sigma F_y = 0: \quad A_y + B_y = F_1 \cos\alpha + F_2 + F_3 \cos\alpha$$

$$A_y = F_1\frac{\sqrt{3}}{2} + F_2 + F_3\frac{\sqrt{3}}{2} - \underbrace{\left(\frac{F_1 + \sqrt{3}F_2 + 2F_3}{2\sqrt{3}}\right)}_{= B_y}$$

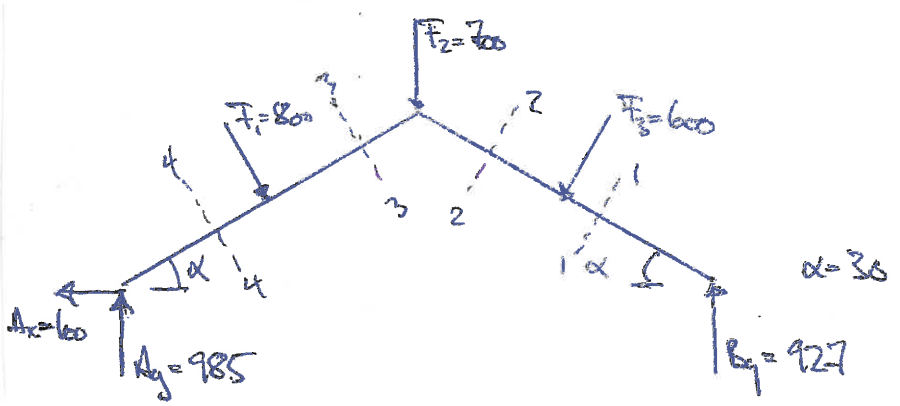
$$= \frac{3F_1 + 2\sqrt{3}F_2 + 3F_3 - F_1 - \sqrt{3}F_2 - 2F_3}{2\sqrt{3}}$$

$$A_y = \frac{2F_1 + \sqrt{3}F_2 + F_3}{2\sqrt{3}} = \underline{985\,kN}$$

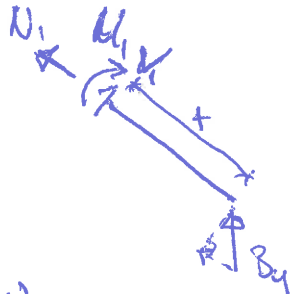
$$\Sigma F_x = 0: \quad A_x + F_3 \sin\alpha - F_1 \sin\alpha = 0$$

$$A_x = (F_1 - F_3)\sin\alpha = \frac{F_1 - F_3}{2} = \underline{100\,kN}$$

b)



Snitt 1-1: $(0 \le x \le L)$



$$\Sigma F_{x'} = 0: \quad N_1 + B_y \sin\alpha = 0, \Rightarrow N_1 = -B_y/2$$

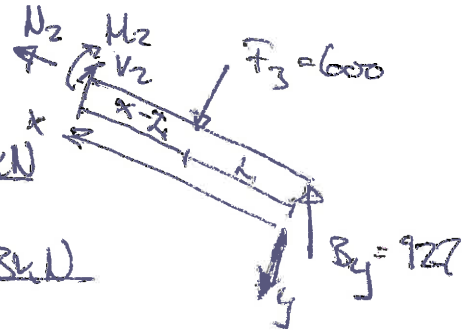
$$\underline{N_1 = -464\,kN}$$

$$\Sigma F_{y'} = 0: \quad V_1 = -B_y \cos\alpha = -927\frac{\sqrt{3}}{2} = \underline{-803\,kN}$$

$$\Sigma M_1 = 0: \quad M_1 - B_y \cos\alpha \cdot x = 803x \Rightarrow M_1(x=L) = 803$$

Oppg. 2 b) (forts.)

Snitt 2-2: $(L \le x \le 2L)$



$\Sigma F_x = 0$: $N_2 = N_1 = -B_y \sin\alpha = \underline{-464\,kN}$

$\Sigma F_y = 0$: $V_2 = F_3 - B_y \cos\alpha = \underline{-203\,kN}$

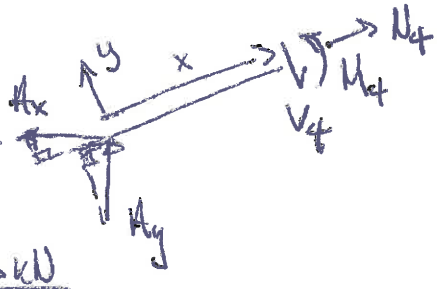
$\Sigma M_2 = 0$: $M_2 = B_y \cos\alpha \cdot x - F_3 (x-L)$

$= (B_y \cos\alpha - F_3)\, x + F_3 \cdot L \Rightarrow M_2(x=L) = M_1(x=L)$

$= 803\,kNm$ OK.

$M_2(x=2L) = \underline{1.006\,MNm}$

Snitt 4-4: $(0 \le x \le L)$

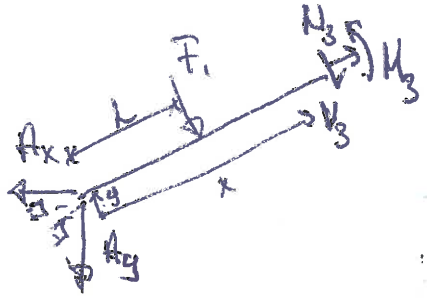


$\Sigma F_x = 0$: $N_4 = A_x \cos\alpha - A_y \sin\alpha = \underline{-406}$

$\Sigma F_y = 0$: $V_4 = A_y \cos\alpha + A_x \sin\alpha = \underline{903\,kN}$

$\Sigma M_4 = 0$: $M_4 = (A_y \cos\alpha + A_x \sin\alpha)\, x$, $\Rightarrow M_4(x=L) = 903\,kNm$

Snitt 3-3: $(L \le x \le 2L)$



$\Sigma F_x = 0$: $N_3 = N_4 = A_x \cos\alpha - A_y \sin\alpha$

$= \underline{-406\,kN}$

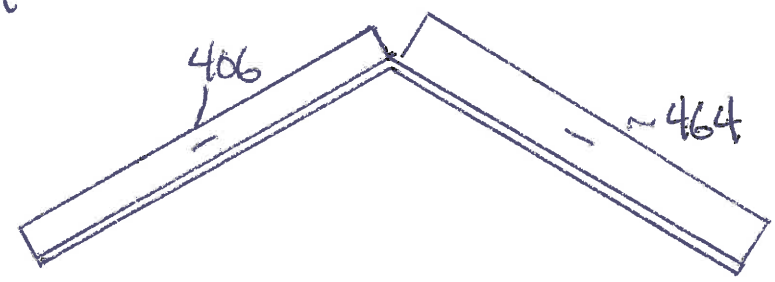
$\Sigma F_y = 0$: $V_3 = A_x \sin\alpha + A_y \cos\alpha - F_1 = \underline{603\,kN}$

$\Sigma M_3 = 0$: $M_3 = (A_x \sin\alpha + A_y \cos\alpha)\, x - F_1 (x-L)$

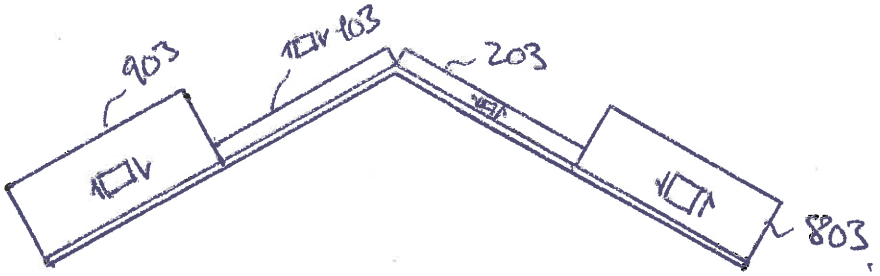
$\Rightarrow M_3(x=L) = M_4(x=L) = \underline{903\,kNm}$ ok!

$M_3(x=2L) = \underline{1.006\,MNm} = M_2(x=2L)$ ok!

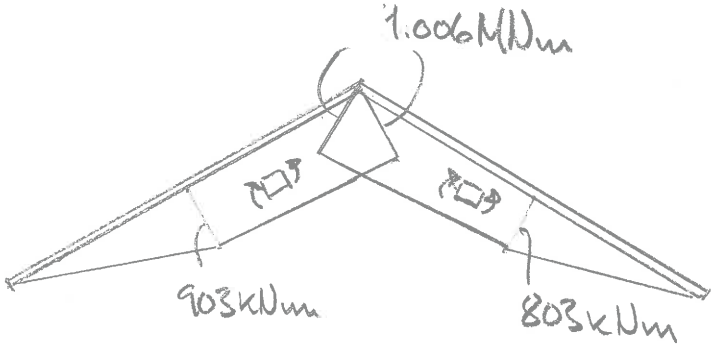
N-diagram



V-diagram



M-diagram



Oppg. 3

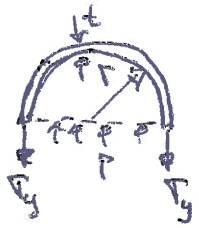
a) $\varepsilon_{45} = \frac{\varepsilon_x+\varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x-\varepsilon_y}{2}\cos(2\cdot 45) + \frac{1}{2}\gamma_{xy}\sin(2\cdot 45) = \frac{\varepsilon_x+\varepsilon_y}{2} + \frac{1}{2}\gamma_{xy}$

$\Rightarrow \gamma_{xy} = 2\varepsilon_{45} - \varepsilon_x - \varepsilon_y = \underline{5.1\cdot 10^{-5}}$

b) likevekt gir $T = \tau_{xy} 2\pi r^2 t$ og $\tau_{xy} = G\gamma_{xy}$

$\Rightarrow G = \frac{T}{2\pi\gamma_{xy} r^2 t} = 37.448\,\text{GPa}$

c)



$2rpL = 2\sigma_y tL \Rightarrow \sigma_y = p\frac{r}{t} = \underline{101\,\text{MPa}}$

$\pi r^2 p = 2\pi r t \sigma_x \Rightarrow \sigma_x = \frac{\sigma_y}{2} = p\frac{r}{2t} = \underline{50.5\,\text{MPa}}$

d) Fra def. av skjærmodul og Hookes lov for plantspenningstilstand:

$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ og $\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x)$

$\Rightarrow E = 2G(1+\nu)$ og $\sigma_y = \frac{2G(1+\nu)}{1-\nu^2}(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x)$

$\Rightarrow \sigma_y = \frac{2G}{1-\nu}(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x)$ $\Leftarrow 1-\nu^2 = (1+\nu)(1-\nu)$

$2G(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x) = \sigma_y(1-\nu) \Rightarrow \nu(\sigma_y + 2G\varepsilon_x) = \sigma_y - 2G\varepsilon_y$

$\nu = \frac{\sigma_y - 2G\varepsilon_y}{\sigma_y + 2G\varepsilon_x}$ og $E = 2G(1+\nu) = 2G\frac{\sigma_y + 2G\varepsilon_x + \sigma_y - 2G\varepsilon_y}{\sigma_y + 2G\varepsilon_x}$

$= 4G\frac{\sigma_y - G(\varepsilon_y - \varepsilon_x)}{\sigma_y + 2G\varepsilon_x}$

$\nu = 0.3494 \approx \underline{0.35}$,
$E = 101.06\,\text{GPa} \approx \underline{101\,\text{GPa}}$.
$\Rightarrow$ Regret er laga av kopper.