NTNU
Institutt for matematiske fag

Eksamen i TMA4100 Matematikk 1
13. august 2012

Løsningsforslag

1 (i) $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x \cot x} = \lim_{x\to 0}(\frac{\sin x}{x}\frac{1}{\cos x}) = \lim_{x\to 0}(\frac{\sin x}{x})\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x} = 1\cdot 1 = 1$ siden $\lim_{x\to 0}(\frac{\sin x}{x}) = \lim_{x\to 0}(\frac{\cos x}{1}) = 1$ ved l'Hôpital.
(ii) Med det foreslåtte variabelskiftet får vi etter to gangers bruk av l'Hôpital:
$\lim_{t\to 0^+}\frac{e^{-\frac{1}{t}}}{t^2} \overset{x=1/t}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{e^x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2}{e^x} = 0.$

2 *Kontinuitet:* Vi må ha $\lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0)$ som gir $\lim_{x\to 0^-}(a\cos x + b\sin x) = a = f(0) = 1$, dvs. $\boxed{a = 1}$.
Deriverbarhet: Vi setter nå $a = 1$. Funksjonen er deriverbar for $x = 0$ hvis og bare hvis de ensidig deriverte eksisterer og er like i 0. Venstrederivert $= \lim_{h\to 0^-}\frac{\cos(h)+b\sin(h)-1}{h} = \lim_{h\to 0^-}\frac{\cos(h)-1}{h} + \lim_{h\to 0^-} b\frac{\sin(h)}{h} \overset{\text{l'Hôpital}}{=} \lim_{h\to 0^-}\frac{-\sin(h)}{1} + b\lim_{h\to 0^-}\frac{\cos(h)}{1} = 0 + b = b$. Høyrederivert $= \lim_{h\to 0^+}\frac{(h^2-h+1)-1}{h} = \lim_{h\to 0^+}(h-1) = -1$. Så vi må ha $\boxed{b = -1}$. Omvendt ser vi at med disse verdiene for a og b blir f deriverbar i 0.
Alternativt, siden f er kontinuerlig og $f'(x)$ er definert for alle $x \neq 0$, kunne vi bruke at $f'(0)$ eksisterer hvis de ensidige grensene $\lim_{x\to 0^+} f'(x)$ og $\lim_{x\to 0^-} f'(x)$ eksisterer og er like. Vi har $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+}(2x-1) = -1$ og $\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^+}(-\sin x + b\cos x) = b$, som gir $b = -1$ som før.

3 **a)** Lengden på hvert delintervall $= \Delta x = \frac{3-1}{4} = 1/2$.
Delepunkter x med tilhørende y-verdier:

x	1	3/2	2	5/2	3
y	1	2/3	1/2	2/5	1/3

Tilnærmet areal ved trapesmetoden: $T = \frac{1/2}{2}(1 + 2\cdot\frac{2}{3} + 2\cdot\frac{1}{2} + 2\cdot\frac{2}{5} + \frac{1}{3}) = \frac{67}{60}$. Med $f(t) = \frac{1}{t}$ har vi $f''(t) = \frac{2}{t^3}$, så $|f(t)| \le 2$ for $t \in [1,3]$. Feilestimatet for trapesmetoden gir: $|\int_1^3 \frac{1}{t}dt - T| = |E_T| \le \frac{2\cdot 2^3}{12\cdot 4^2} = \frac{1}{12}$, dvs. $\frac{67}{60} - \frac{1}{12} = \frac{31}{30} \le \int_1^3 \frac{1}{t}dt \le \frac{67}{60} - \frac{1}{12} = \frac{6}{5}$. Fra den første ulikheten får vi $\int_1^3 \frac{1}{t}dt \ge \frac{31}{30} > 1$. Siden $\int_1^e \frac{1}{t}dt = 1$ pr. definisjon, og siden $\frac{1}{t}$ er en positiv funksjon for $t > 0$, får vi fra $\int_1^3 \frac{1}{t}dt > 1 = \int_1^e \frac{1}{t}dt$ at $e < 3$.

b) Vi minner om Taylors formel:
$f(a+x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}x + \frac{f''(a)}{2!}x^2 \dots \frac{f^{(n)}(a)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{(n+1)}$, hvor c er et tall mellom a og $a+x$. Med $f(x) = e^x$, $a = 0$ og $x = 1$ gir dette: $e = e^1 = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots \frac{1}{n!} + \frac{e^c}{(n+1)!}$, hvor $0 < c < 1$. Vi har derfor at $e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots \frac{1}{n!}$ med en feil mindre enn 10^{-5} dersom vi velger n så stor at $\frac{e^c}{(n+1)!} < 10^{-5}$. Nå har vi at $\frac{e^c}{(n+1)!} < \frac{e^1}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!}$, så det holder å velge n så stor at $\frac{3}{(n+1)!} < 10^{-5}$. Vi prøver oss frem (avrunding til én desimal):

n	1	2	3	4	5	6	7	8
$\frac{3}{(n+1)!}$	1.5	0.5	0.1	0.03	0.004	0.0006	0.00008	0.000008

så vi ser at $n = 8$ holder. Dermed får vi at $e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} + \frac{1}{8!} \approx 2.718278770 \approx 2.71828$ med en feil mindre enn 10^{-5}.

4 Kulekalotten fremkommer ved for eksempel å rotere området $r-h \leq y \leq \sqrt{r^2-x^2}$, $0 \leq x \leq a$, om y-aksen. Skivemetoden gir:

$$\text{Volum} = \pi \int_{r-h}^{r} x^2 dy = \pi \int_{r-h}^{r} (r^2-y^2) dy = \pi[r^2 y - \frac{1}{3}y^3]_{y=r-h}^{y=r} = \pi(rh^2 - \frac{1}{3}h^3)\,.$$

Fra figuren ser vi at $(r-h)^2 + a^2 = r^2$, som gir $r = \frac{a^2+h^2}{2h}$. Vi setter dette inn i uttrykket for volumet og får

$$\text{Volum} = \pi[\frac{a^2+h^2}{2h}h^2 - \frac{1}{3}h^3] = \frac{\pi}{6}(3a^2h + 3h^3 - 2h^3) = \frac{\pi}{6}h(3a^2+h^2)\,.$$

5 Dette er en lineær 1. ordens differensialligning $y' + P(x)y = Q(x)$ med $P(x) = \frac{1}{\tanh x}$ og $Q(x) = 2\cosh x$. Vi har $\int P\,dx = \int \frac{1}{\tanh x}dx = \int \frac{\cosh x}{\sinh x}dx = \ln\sinh x$. Dette gir:

Integrerende faktor: $\quad v(x) = e^{\int P(x)\,dx} = e^{\ln\sinh x} = \sinh x$

Generell løsning:

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{v(x)}\int v(x)Q(x)dx \\ &= \frac{1}{\sinh x}\int \sinh x \cdot 2\cosh x\,dx = \frac{1}{\sinh x}\int \sinh 2x\,dx \\ &= \frac{1}{\sinh x}(\frac{1}{2}\cosh 2x + C)\,, \end{aligned}$$

der C er en vilkårlig konstant. Initialbetingelsen $y(1) = \frac{1}{\sinh 1}(\frac{1}{2}\cosh 2 + C) = b$ gir $C = b\sinh 1 - \frac{1}{2}\cosh 2$, så løsningen på initialverdiproblemet blir

$$y = \frac{1}{\sinh x}(\frac{1}{2}\cosh 2x + b\sinh 1 - \frac{1}{2}\cosh 2)\,.$$

For at $\lim_{x\to 0} y(x)$ skal eksistere, må telleren i uttrykket for y ha verdien 0 i 0 (siden nevneren er lik 0 i 0). Vi får $(\frac{1}{2}\cosh 2x + b\sinh 1 - \frac{1}{2}\cosh 2)|_{x=0} = \frac{1}{2}\cosh 0 + b\sinh 1 - \frac{1}{2}\cosh 2 = \frac{1}{2} + b\sinh 1 - \frac{1}{2}\cosh 2 = 0$, som gir $\boxed{b = \frac{1}{2}\frac{\cosh 2 - 1}{\sinh 1}}$, og dermed

$$y = \frac{1}{\sinh x}(\frac{1}{2}\cosh 2x + \frac{1}{2}(\cosh 2 - 1) - \frac{1}{2}\cosh 2) = \frac{1}{2}\frac{\cosh 2x - 1}{\sinh x}\,.$$

Vi sjekker så at $\lim_{x\to 0} y(x)$ eksisterer med denne verdien av b:

$$\lim_{x\to 0} y(x) = \lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\frac{\cosh 2x - 1}{\sinh x} \overset{\text{l'Hôpital}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\frac{2\sinh 2x}{\cosh x} = 0\,.$$

6 Vi har $g(t) = \frac{2}{3}f(t)^{\frac{3}{2}}$ for alle t, og derivasjon av denne likheten gir $g'(t) = f(t)^{\frac{1}{2}}f'(t)$. Innsetting i $\sqrt{f'(t)^2 + g'(t)^2} = \frac{2}{3}$ gir $\sqrt{f'(t)^2 + f'(t)^2)f(t)^2} = |f'(t)|\sqrt{1+f(t)} = \frac{2}{3}$. At punktet beveger seg mot høyre, betyr at $f'(t) \geq 0$ for alle t, så absoluttverditegnet rundt $f'(t)$ kan sløyfes, og vi får $f'(t)\sqrt{1+f(t)} = \frac{2}{3}$. Dette er en separabel differensialligning, og integrasjon gir $\frac{2}{3}(1+f(t))^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}t + C$, hvor C er en konstant. Siden punktet er i origo ved $t = 1$, har vi $f(1) = 0$, som ved innsetting i foregående ligning gir $C = 0$. Dermed har vi $(1+f(t))^{\frac{3}{2}} = t$, som gir $f(t) = t^{\frac{2}{3}} - 1$ og $g(t) = \frac{2}{3}f(t)^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}(t^{\frac{2}{3}} - 1)^{\frac{3}{2}}$, m.a.o., punktets posisjon ved tiden t er gitt ved

$$x = t^{\frac{2}{3}} - 1, \quad y = \frac{2}{3}(t^{\frac{2}{3}} - 1)^{\frac{3}{2}}, \quad t \geq 1\,.$$

7 Vi viser at eksistens av flere enn to nullpunkt vil stride mot antakelsen om at $f''(x) > 0$ for alle x. Så anta at f har tre forskjellige nullpunkt $x_1 < x_2 < x_3$. Ifølge sekantsetningen finnes da et $c_1 \in (x_1, x_2)$ slik at $f'(x) = 0$ og et $c_2 \in (x_2, x_3)$ slik at $f'(c_2) = 0$. Siden $c_1 \neq c_2$, vil derfor f' ha minst to nullpunkt. Men betingelsen $f''(x) > 0$ for alle x medfører at f' er strengt voksende, og f' kan derfor ikke ha mer enn ett nullpunkt. Ergo har f høyst to nullpunkt.