Oppgave 1 Løs initialverdiproblemet

$$y' - (2/x)y = x^2,\ y(1) = 2.$$

Løsning: $y' - (2/x)y = x^2$ er en førsteordens lineær differensialligning. Vi finner en løsning på intervallet $(0, \infty)$. Den integrerende faktoren er $e^{\int -(2/x)\ dx} = e^{-2\ln x} = x^{-2}$, så ligningen kan bli omskrivet til

$$\frac{d}{dx}(yx^{-2}) = \frac{y'}{x^2} - 2\frac{y}{x^3} = \frac{x^2}{x^2} = 1.$$

Det følger at $yx^{-2} = \int 1\ dx = x + c$. Da $y(1) = 2$, følger det at $c = 1$, så løsningen til initialverdiproblemet $y' - (2/x)y = x^2,\ y(1) = 2$ er $y = x^2(x+1) = x^3 + x^2$.

Oppgave 2 Beregn det ubestemte integralet

$$\int \frac{dx}{x^3 + x}.$$

Løsning: Da $x^3 + x = x(x^2+1)$ forsøker vi at omskrive $\dfrac{1}{x^3+x}$ til $\dfrac{ax+b}{x^2+1} + \dfrac{c}{x}$ for passende valg av konstanter a, b og c.

$$\frac{ax+b}{x^2+1} + \frac{c}{x} = \frac{(ax+b)x + c(x^2+1)}{x(x^2+1)} = \frac{(a+c)x^2 + bx + c}{x^3+x}$$

så $\dfrac{ax+b}{x^2+1} + \dfrac{c}{x} = \dfrac{1}{x^3+x}$ hvis og bare hvis $a + c = 0$, $b = 0$ og $c = 1$. Det er enkelt å se at $a + c = 0$, $b = 0$ og $c = 1$ hvis og bare hvis $a = -1$, $b = 0$ og $c = 1$. Vi har altså at $\dfrac{1}{x^3+x} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{x}{x^2+1}$, og dermed at

$$\int \frac{dx}{x^3+x} = \int \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}\ dx = \int \frac{1}{x}\ dx - \frac{x}{x^2+1}\ dx.$$

Vi har at

$$\int \frac{1}{x}\ dx = \ln|x| + c.$$

For å beregne integralet $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+1}\ dx$ gjør vi bruk av substitusjonen $y = x^2 + 1$. Da er $dy = 2x\ dx$ og

$$\int \frac{x}{x^2+1}\ dx = \int \frac{\frac{1}{2}dy}{y} = \frac{1}{2}\ln|y| + c = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + c.$$

Dermed har vi at

$$\int \frac{dx}{x^3+x} = \int \frac{1}{x}\ dx - \frac{x}{x^2+1}\ dx = \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + c = \ln\frac{|x|}{\sqrt{x^2+1}} + c.$$

Oppgave 3 Vi skal løse ligningen $x^2 - 2\cos x = 0$.

a) Vis at ligningen har nøyaktig én løsning på intervallet $[0, 2]$. Har ligningen noen løsning utenfor dette intervallet?

Løsning: Funksjonen $f(x) = x^2 - 2\cos x$ er kontinuerlig, og da $f(0) = -2 < 0$ og $f(2) = 4 - 2\cos(2) > 0$ følger det av skjæringssetningen (mellomverdisetningen) at det finnes en c i intervallet $[0, 2]$ slik at $f(c) = 0$. Ligningen $x^2 - 2\cos x = 0$ har altså en løsning på intervallet $(0, 2)$. Da $f'(x) = 2x + 2\sin(x) > 0$ for alle $x > 0$, er f strengt voksende på intervallet $[0, \infty)$, og ligningen $x^2 - 2\cos x = 0$ har derfor nøyaktig én løsning på intervallet $[0, 2]$.

Da f er en jevn funksjon (dvs. $f(-x) = f(x)$ for alle x), må ligningen $x^2 - 2\cos x = 0$ også ha en løsning på intervallet $[-2, 0]$ (nemlig $x = -c$).

(Da f er strengt avtagende på intervallet $(-\infty, 0]$ (fordi f er jevn og strengt voksende på $[0, \infty)$), og strengt voksende på $[0, \infty)$, følger det at $x = \pm c$ er de eneste løsningene til ligningen $x^2 - 2\cos x = 0$.)

b) Bruk Newtons metode til å finne løsningen på intervallet $[0, 2]$ med tre desimalers nøyaktighet.

Løsning: Vi lar $x_0 = 1$ og setter

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^2 - 2\cos x_n}{2x_n + 2\sin x_n}.$$

Da får vi $x_1 = 1{,}021885930$, $x_2 = 1{,}021689970$ og $x_3 = 1{,}021689954$. Det synes at de 3 første desimaler har stabilisert seg, så vi gjetter på at løsningen med tre desimalers nøyaktighet er $x = 1{,}022$, dvs. vi gjetter på at løsningen tilhører intervallet $[1{,}0215, 1{,}0225)$. Da $f(1{,}0215) = -0{,}000712152 < 0$ og $f(1{,}0225) = 0{,}003038154 > 0$ ser vi at det er tilfellet, så løsningen med tre desimalers nøyaktighet er $x = 1{,}022$.

(Hadde vi i stedet startet med $x_0 = 2$, hadde vi fått $x_1 = 1{,}169508482$, $x_2 = 1{,}029192017$, $x_3 = 1{,}021712598$, $x_4 = 1{,}021689954$ og $x_5 = 1{,}021689954$. Vi kan ikke starte med $x_0 = 0$ fordi $f'(0) = 0$.)

Oppgave 4 Finn punktene der funksjonen $f(x) = |x - 1| - (x - 2)^2$ oppnår henholdsvis sitt maksimum og sitt minimum på intervallet $[0, 4]$.

Løsning: Funksjonen f oppnår sitt maksimum og minimum enten i endepunktene av intervallet, i punkter der f ikke er deriverbar, eller i punkter der $f'(x) = 0$. Funksjonen f er deriverbar i alle punkter pånær når $x = 1$, og

$$f'(x) = \begin{cases} -1 - 2(x-2) & \text{for } x < 1, \\ 1 - 2(x-2) & \text{for } x > 1. \end{cases}$$

Vi har at

$$-1 - 2(x-2) = 0 \iff x - 2 = -1/2 \iff x = 3/2,$$

og

$$1 - 2(x-2) = 0 \iff x - 2 = 1/2 \iff x = 5/2,$$

så det eneste punktet i intervallet $[0,4]$ der $f'(x) = 0$ er $x = 5/2$. Da $f(0) = -3 < f(1) = f(4) = -1 < f(5/2) = 5/4$, ser vi at funksjonen f oppnår sitt maksimum på intervallet $[0,4]$ i punktet $x = 5/2$ og sitt minimum på intervallet $[0,4]$ i punktet $x = 0$.

Oppgave 5 Gitt funksjonen

$$f(x) = \int_0^x \sqrt{2\cos^2 t - 1}\, dt, \; x \in [-\pi/4, \pi/4].$$

Bestem buelengden til grafen til f.

Løsning: Buelengden til grafen til f er

$$\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sqrt{(f'(x))^2 + 1}\; dx.$$

Det følger av analysens fundamentalsetning at $f'(x) = \sqrt{2\cos^2 x - 1}$, så $(f'(x))^2 + 1 = 2\cos^2 x$ og $\sqrt{(f'(x))^2 + 1} = \sqrt{2}\cos x$ (da $\cos(x) \geq 0$ for $x \in [-\pi/4, \pi/4]$), og derfor er buelengden til grafen til f lik

$$\begin{aligned} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sqrt{(f'(x))^2 + 1}\; dx &= \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sqrt{2}\cos x\; dx = 2\sqrt{2}\int_0^{\pi/4} \cos x\; dx = 2\sqrt{2}[\sin x]_0^{\pi/4} \\ &= 2\sqrt{2}(\sin(\pi/4) - \sin(0)) = 2\sqrt{2}(1/\sqrt{2} - 0) = 2. \end{aligned}$$

(Vi har her brukt at $\cos x$ er en jevn funksjon fra hvilke det følger at $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos x\, dx = 2\int_0^{\pi/4} \cos x\; dx$.)

Oppgave 6 Uttrykk funksjonen

$$\frac{e^{-x^2}-1}{x^2}$$

som en Maclaurinrekke, og bruk denne rekken til å uttrykke det bestemte integralet

$$\int_0^1 \frac{e^{-x^2}-1}{x^2}\,dx$$

som en alternerende rekke. Hvor mange ledd må du summere for at partialsummen av denne rekken skal approksimere integralet med en feil mindre enn 10^{-2}? (Vink: Det kan antas kjent at

$$e^t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}$$

holder for alle reelle tall t.)

Løsning: Da $e^t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}$ holder for alle reelle tall t, er

$$e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}$$

for alle reelle tall x, og derfor er

$$e^{-x^2} - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}$$

og for alle reelle tall x, og

$$\frac{e^{-x^2}-1}{x^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n-2}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{2n}}{(n+1)!}$$

for alle reelle tall x forskjellig fra 0. Hvis $x = 0$ så er $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{2n}}{(n+1)!} = -1$. Det følger at hvis vi definerer funksjonen f ved å sette

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{-x^2}-1}{x^2} & \text{hvis } x \neq 0, \\ -1 & \text{hvis } x = 0, \end{cases}$$

så er

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{2n}}{(n+1)!}$$

Maclaurinrekken til f. Da Maclaurinrekken til f konvergerer mot $\frac{e^{-x^2}-1}{x^2}$ for alle x der $\frac{e^{-x^2}-1}{x^2}$ er definert (dvs. for alle $x \neq 0$), har vi uttrykt funksjonen $\frac{e^{-x^2}-1}{x^2}$ som en Maclaurinrekke.

Det følger også at

$$\int_0^1 \frac{e^{-x^2}-1}{x^2}\,dx = \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}x^{2n}}{(n+1)!}\,dx = \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}x^{2n+1}}{(2n+1)(n+1)!}\right]_0^1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)(n+1)!}$$

Vi har hermed uttrykt det bestemte integralet

$$\int_0^1 \frac{e^{-x^2}-1}{x^2}\,dx$$

som en alternerende rekke.

Da følgen $\left\{\frac{1}{(2n+1)(n+1)!}\right\}$ er en monoton avtagende følge som konvergerer mot 0, følger det at

$$\left|\int_0^1 \frac{e^{-x^2}-1}{x^2}\,dx - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)(k+1)!}\right| \leq \frac{1}{(2n+1)(n+1)!}$$

for alle $n \geq 1$. Vi har derfor at hvis $\frac{1}{(2n+1)(n+1)!} < 10^{-2}$, så vil $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)(k+1)!}$ approksimere integralet $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-x^2}-1}{x^2}\,dx$ med en feil mindre enn 10^{-2}. Da $\frac{1}{(2+1)(1+1)!} = 1/6 > 1/100$, $\frac{1}{(2\cdot 2+1)(2+1)!} = 1/30 > 1/100$, og $\frac{1}{(2\cdot 3+1)(3+1)!} = 1/168 < 1/100$, må vi summerer de 3 første leddene av rekken $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)(n+1)!}$ for at partialsummen approksimerer integralet med en feil mindre enn 10^{-2}.

Oppgave 7 Sindre skal steke ribbe til julaften og følger en oppskrift han har funnet på Internett. Vi kan anta at temperaturen på kjøkkentet er 21 grader. I tillegg antar vi at Newtons avkjølingslov gjelder slik at temperaturen i ribba endres med en rate som er proporsjonal med temperaturdifferansen mellom ribba og omgivelsene (kjøkken eller ovn). Vi antar dessuten at temperaturen i Sindres ovn endrer seg momentant til ønsket temperatur når Sindre skrur på bryteren.

a) Sindre tar ribba ut av kjøleskapet en time før han skal steke den. Han stikker umiddelbart steketermometeret i ribba og leser av at temperaturen er 4 grader. Idet han setter ribba inn i ovnen, leser han av at temperaturen er 7 grader. Han lar så ribba steke i 30 minutter på 230 grader. Hva viser steketermometeret da?

Løsning: La T_0 være temperaturen til omgivelsene, og la $T(t)$ være temperaturen til ribba til tiden t hvor t måles i timer. Da har vi at

$$\frac{dT(t)}{dt} = k(T_0 - T(t)) \tag{1}$$

for en konstant k. Ligningen (1) er en separabel differensialliging. Hvis vi separarer de variable får vi $kdt = \frac{dT(t)}{T_0 - T(t)}$, hvorfra følger at

$$kt = \int k\ dt = \int \frac{dT(t)}{T_0 - T(t)} = -\ln|T_0 - T(t)| + c$$

hvor c er en konstant. La vi $t = 0$ ser vi at $c = \ln|T_0 - T(0)|$. Vi har altså at

$$kt = -\ln|T_0 - T(t)| + \ln|T_0 - T(0)| = \ln\left|\frac{T_0 - T(0)}{T_0 - T(t)}\right|.$$

Når ribba stå på kjøkkentet, har vi at $T_0 = 21$, $T(0) = 4$ og $T(1) = 7$, så

$$k = \ln\left|\frac{21 - 4}{21 - 7}\right| = \ln\left(\frac{17}{14}\right).$$

Det følger at

$$t\ln\left(\frac{17}{14}\right) = \ln\left|\frac{T_0 - T(0)}{T_0 - T(t)}\right|$$

og dermed at

$$\left(\frac{17}{14}\right)^t = \left|\frac{T_0 - T(0)}{T_0 - T(t)}\right|.$$

Temperaturen til ribba kan ikke bli høyere enn temperaturen til omgivelsene, så $|T_0 - T(0)| = T_0 - T(0)$ og $|T_0 - T(t)| = T_0 - T(t)$. Herav følger at

$$T_0 - T(t) = \left(\frac{14}{17}\right)^t (T_0 - T(0))$$

og dermed at

$$T(t) = T_0 - \left(\frac{14}{17}\right)^t (T_0 - T(0)).$$

Når ribba stekes i ovnen er $T_0 = 230$ og $T(0) = 7$, så

$$T(1/2) = 230 - \left(\frac{14}{17}\right)^{1/2} (230 - 7) = 230 - 223\sqrt{\frac{14}{17}}.$$

Vi har altså at temperaturen til ribba etter den har stekt i 30 minutter er $230 - 223\sqrt{14/17} \approx 28$ grader.

b) I følge oppskriften skal Sindre nå skru temperaturen ned til 160 grader og ta ut ribba når termometeret viser 75 grader. Imidlertid har han nå ikke mer enn to timer til rådighet. Hva må han i stedet endre temperaturen til om julemiddagen skal bli ferdig i tide?

Løsning: Nå er $T(0) = 230 - 223\sqrt{14/17}$, og vi ønsker at $T(2) = 75$. Vi skal altså finne T_0 slik at

$$T(t) = T_0 - \left(\frac{14}{17}\right)^2 \left(T_0 - \left(230 - 223\sqrt{14/17}\right)\right) = 75.$$

Det følger at vi må ha

$$T_0 = \frac{75 - \left(\frac{14}{17}\right)^2 \left(230 - 223\sqrt{14/17}\right)}{1 - \left(\frac{14}{17}\right)^2} = \frac{43708\sqrt{238} - 397885}{1581} \approx 175.$$

Dvs. temperaturen til ovnen må settes til $\frac{43708\sqrt{238}-397885}{1581} \approx 175$ grader.

Oppgave 8 La $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ være en følge. Vi antar at det finnes en $r > 0$ slik at følgen $\{a_n r^n\}_{n=0}^{\infty}$ er begrenset. Vis at da er potensrekken

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

absolutt konvergent når $|x| < r$.

Løsning: Da følgen $\{a_n r^n\}_{n=0}^{\infty}$ er begrenset, finnes et tall K slik at $|a_n r^n| \leq K$ for alle n. Vi har da at $|a_n x^n| = |a_n r^n| \frac{|x^n|}{r^n} \leq K \left(\frac{|x|}{r}\right)^n$ for alle n. Når $|x| < r$ er den geometriske rekken $\sum_{n=0}^{\infty} K \left(\frac{|x|}{r}\right)^n$ konvergent (fordi $\frac{|x|}{r} < 1$). Det følger derfor av sammenligningskriteriet at rekken $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ er konvergent når $|x| < r$, dvs. at potensrekken $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ er absolutt konvergent når $|x| < r$.