EKSAMEN TMA4100 HØST 2014
LØSNINGSFORSLAG

Oppgave 1. Under rottegnet står det $1+e^x$, og den deriverte til dette uttrykket er e^x, som står utenfor rottegnet. Sett derfor $u = 1+e^x$. Da får vi

$$\begin{aligned} du/dx &= e^x \\ du &= e^x dx, \end{aligned}$$

og vi kan løse intergralet:

$$\int e^x\sqrt{1+e^x}\,dx = \int \sqrt{u}\,du = \tfrac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + C = \boxed{\tfrac{2}{3}(1+e^x)^{\frac{3}{2}} + C}$$

Oppgave 2. Her går både teller og nevner mot 0 når x går mot $\pi/2$. Siden begge er deriverbare kan vi bruke L'Hôpitals regel:

$$\lim_{x\to\pi/2} \frac{\int_{\pi/2}^{x}\sqrt{2-\cos u}\,du}{\cos x} = \lim_{x\to\pi/2} \frac{\frac{d}{dx}\left(\int_{\pi/2}^{x}\sqrt{2-\cos u}\,du\right)}{\frac{d}{dx}(\cos x)} = \lim_{x\to\pi/2}\frac{\sqrt{2-\cos x}}{-\sin x} = \frac{\sqrt{2}}{-1} = \boxed{-\sqrt{2}}$$

Her har vi brukt analysens fundamentalteorem til å derivere telleren.

Oppgave 3. Først må vi finne dy/dx i punktet $(1,0)$. Funksjonen er gitt implisitt, men ved å derivere begge sidene med hensyn på x, og bruke blant annet produktregelen og kjerneregelen, får vi

$$\begin{aligned} \tfrac{d}{dx}\left(x(y+1)+e^y\right) &= \tfrac{d}{dx}2 \\ \left(\tfrac{d}{dx}x\right)(y+1) + x\left(\tfrac{d}{dx}(y+1)\right) + \tfrac{d}{dx}e^y &= 0 \\ 1\cdot(y+1) + x\tfrac{dy}{dx} + e^y\tfrac{dy}{dx} &= 0. \end{aligned}$$

I punktet $(1,0)$ er $x = 1$ og $y = 0$, så vi får

$$\begin{aligned} 1 + 2\tfrac{dy}{dx} &= 0 \\ \tfrac{dy}{dx} &= -\tfrac{1}{2}. \end{aligned}$$

Tangenten vi er ute etter er altså den rette linjen gjennom punktet $(1,0)$ med stigningstall $-\frac{1}{2}$, og har derfor ligning

$$y - 0 = -\tfrac{1}{2}(x-1)$$

det vil si

$$\boxed{y = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}x}$$

Oppgave 4. Nevneren faktoriseres som

$$x(x^2+2x+2),$$

så vi delbrøkoppspalter: det finnes konstanter A, B, C slik at

$$\frac{1}{x^3+2x^2+2x} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+2}.$$

Multiplikasjon med fellesnevneren gir

$$\begin{aligned} 1 &= A(x^2+2x+2)+(Bx+C)x \\ 0 &= (A+B)x^2+(2A+C)x+(2A-1), \end{aligned}$$

og vi får

$$A = \tfrac{1}{2}, \quad B = -\tfrac{1}{2}, \quad C = -1.$$

Dette gir

$$\int \frac{dx}{x^3+2x^2+2x} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x} - \int \frac{\frac{1}{2}x+1}{x^2+2x+2}dx$$

Den siste integranden må vi behandle litt. Den deriverte av nevneren er $2x+2$, så vi splitter opp brøken/integralet og omskriver litt:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^3+2x^2+2x} &= \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x} - \frac{1}{2}\int \frac{x+1}{x^2+2x+2}dx - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+2x+2} \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x} - \frac{1}{4}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+2}dx - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x+1)^2+1} \end{aligned}$$

I de to siste integralene foretar vi substitusjon:

$$\begin{aligned} u = x^2+2x+2 &\quad\Rightarrow\quad du = (2x+2)dx \\ v = x+1 &\quad\Rightarrow\quad dv = dx, \end{aligned}$$

og vi får

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^3+2x^2+2x} &= \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x} - \frac{1}{4}\int \frac{du}{u} - \frac{1}{2}\int \frac{dv}{v^2+1} \\ &= \tfrac{1}{2}\ln|x| - \tfrac{1}{4}\ln|u| - \tfrac{1}{2}\arctan v + C \\ &= \boxed{\tfrac{1}{2}\ln|x| - \tfrac{1}{4}\ln(x^2+2x+2) - \tfrac{1}{2}\arctan(x+1) + C} \end{aligned}$$

Merk at vi ikke trenger absoluttverditegn på uttrykket x^2+2x+2 siden det aldri er negativt: $x^2+2x+2 = (x+1)^2+1$.

Oppgave 5. Diffligningen er på formen

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x),$$

med $p(x) = x^2 = q(x)$. Den har generell løsning

$$y(x) = e^{-\mu(x)}\int q(x)e^{\mu(x)}dx,$$

hvor $\mu(x)$ er en funksjon som har $p(x)$ som derivert, det vil si $\mu'(x) = x^2$. Vi velger $\mu(x) = \frac{1}{3}x^3$, og får da

$$y(x) = e^{-\frac{1}{3}x^3}\int x^2 e^{\frac{1}{3}x^3}dx.$$

Substitusjonen

$$u = \tfrac{1}{3}x^3, \qquad du = x^2 dx$$

gir da

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{-\frac{1}{3}x^3}\int e^u du \\ &= e^{-\frac{1}{3}x^3}(e^u + C) \\ &= e^{-\frac{1}{3}x^3}(e^{\frac{1}{3}x^3} + C) \\ &= 1 + Ce^{-\frac{1}{3}x^3}. \end{aligned}$$

Siden

$$2 = y(0) = 1 + C$$

får vi $C = 1$ og derfor

$$\boxed{y(x) = 1 + e^{-\frac{1}{3}x^3}}$$

Oppgave 6. Taylor-polynomet av grad 2 til en funksjon $g(x)$ om punktet $x = 0$ er per definisjon andregradspolynomet

$$\begin{aligned} P_2(x) &= \frac{g(0)}{0!} + \frac{g'(0)}{1!}x + \frac{g''(0)}{2!}x^2 \\ &= g(0) + g'(0)x + \tfrac{1}{2}g''(0)x^2. \end{aligned}$$

Vi må altså finne $g(0), g'(0)$ og $g''(0)$. Generelt vil kjerneregelen/produktregelen anvendt på en sammensatt funksjon $p(q(x))$ gi

$$\begin{aligned} [p(q(x))]' &= p'(q(x))\cdot q'(x) \\ [p(q(x))]'' &= p''(q(x))\cdot q'(x)^2 + p'(q(x))\cdot q''(x). \end{aligned}$$

Med $g(x) = f(f(x))$ får vi da

$$\begin{aligned} g(0) &= f(f(0)) = f(0) = 0 \\ g'(0) &= f'(f(0))\cdot f'(0) = f'(0)\cdot f'(0) = 2\cdot 2 = 4 \\ g''(0) &= f''(f(0))\cdot f'(0)^2 + f'(f(0))\cdot f''(0) = f''(0)\cdot f'(0)^2 + f'(0)\cdot f''(0) \\ &= 1\cdot 2^2 + 2\cdot 1 = 6. \end{aligned}$$

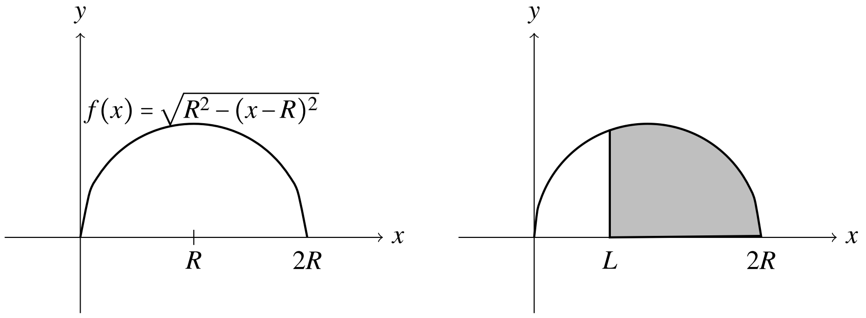
Dette gir

$$\begin{aligned} P_2(x) &= 0 + 4x + \tfrac{1}{2}\cdot 6x^2 \\ &= \boxed{4x + 3x^2} \end{aligned}$$

Oppgave 7. En måte å tenke på en kule med radius R på er som rotasjonslegemet man får ved å rotere halvsirkelen

$$f(x) = \sqrt{R^2 - (x-R)^2} \qquad 0 \le x \le 2R$$

om x-aksen:



Volumet vi er ute etter er det samme omdreiningsvolumet man får ved å la x gå fra L til $2R$:

$$\begin{aligned} V(L) &= \int_L^{2R} \pi f(x)^2 dx \\ &= \pi \int_L^{2R} (R^2 - (x-R)^2) dx \\ &= \pi \int_L^{2R} (2Rx - x^2) dx \\ &= \pi \left[Rx^2 - \tfrac{1}{3}x^3 \right]_L^{2R} \\ &= \pi \left(4R^3 - \tfrac{8}{3}R^3 - RL^2 + \tfrac{1}{3}L^3 \right) \\ &= \boxed{\pi \left(\tfrac{4}{3}R^3 - RL^2 + \tfrac{1}{3}L^3 \right)} \end{aligned}$$

Merk at det er flere mulige fremgangsmåter her, f.eks. via et rotasjonslegeme man får ved å rotere en passende graf rundt y-aksen.

Oppgave 8. Det hele handler om antall fisk i innsjøen på et gitt tidspunkt. La derfor $F(t)$ betegne antall fisk etter t dager. Setningen "endringen i fiskebestanden per tidsenhet er proporsjonal med 1 delt på kvadratroten av fiskebestanden" oversettes direkte til diffligningen

$$\frac{dF}{dt} = \frac{k}{\sqrt{F}},$$

hvor k er den ukjente proporsjonalitetskonstanten. Dette er en separabel diffligning: vi får

$$\begin{aligned} \sqrt{F}dF &= kdt \\ \int \sqrt{F}dF &= \int kdt \\ \tfrac{2}{3}F^{\frac{3}{2}} &= kt + C, \end{aligned}$$

(her har vi samlet de to konstantene fra integralene til én konstant C) som gir

$$F(t) = \left[\tfrac{3}{2}(kt + C) \right]^{\frac{2}{3}}.$$

Vi har to konstanter, men også to kjente verdier av F. Siden

$$2500 = F(0) = \left[\tfrac{3}{2}C \right]^{\frac{2}{3}}$$

får vi

$$C = \tfrac{2}{3} \cdot 2500^{\frac{3}{2}} = \frac{250000}{3},$$

altså

$$F(t) = \left[\tfrac{3}{2}(kt + \tfrac{250000}{3}) \right]^{\frac{2}{3}} = \left[\tfrac{3}{2}kt + 125000 \right]^{\frac{2}{3}}.$$

Videre har vi

$$1600 = F(122) = \left[\tfrac{3}{2}\cdot 122k + 125000\right]^{\frac{2}{3}} = [183k + 125000]^{\frac{2}{3}},$$

som gir

$$183k + 125000 = 1600^{\frac{3}{2}} = 64000,$$

det vi si

$$k = -\frac{61000}{183} = -\frac{1000}{3}.$$

Dette gir oss

$$F(t) = \left[\tfrac{3}{2}\cdot\left(-\frac{1000}{3}\right)t + 125000\right]^{\frac{2}{3}} = [125000 - 500t]^{\frac{2}{3}}.$$

All fisken er død når $F = 0$, det vil si når $125000 - 500t = 0$. Dette gir $t = 250$. Vi sjekker at ikke $F(249)$ ligger mellom 0 og 1 (hvis f.eks. $F(249)$ hadde vært 0.3, *kunne* vi ha tolket det som at all fisken var død også etter 249 dager):

$$F(249) = 500^{\frac{2}{3}} \approx 63.$$

Altså er $F(249) \approx 63$, mens $F(250) = 0$. Konklusjonen blir at

$$\boxed{\text{det vil ta 250 dager før all fisken er død.}}$$

Oppgave 9. Newtons metode for en funksjon $f(x)$ starter med en verdi x_0 og gir verdier $x_1, x_2, \ldots$ gitt ved

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Fra den rekursive formelen vi er gitt i oppgaven får vi

$$\frac{f(x)}{f'(x)} = \frac{x^2 - 3}{2x},$$

og den enkleste funksjonen som tilfredsstiller dette er

$$\boxed{f(x) = x^2 - 3}$$

(merk at for en hvilken som helst konstant k vil også funksjonen $k(x^2 - 3)$ passe inn).

Funksjonen $f(x) = x^2 - 3$ har to nullpunkt, nemlig $\pm\sqrt{3}$. Siden vi starter med $x_0 = 2$ og $f(x)$ er konveks ($f''(x) = 2$), vil følgende holde:

(1) følgen er minkende: $x_0 > x_1 > x_2 > \cdots$
(2) den er nedre begrenset av $\sqrt{3}$, det vil si $\sqrt{3} \le x_n$ for alle n.

$$\boxed{\text{Følgen vil derfor konvergere, og det mot nullpunktet } \sqrt{3}.}$$

Oppgave 10. Den første divergente rekken mange tenker på er den harmoniske rekken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

så vi prøver å finne to konvergente rekker $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ og $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ med $a_n b_n = \frac{1}{n}$. Eller hva med en enkelt konvergerende rekke $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ med $a_n^2 = \frac{1}{n}$? Mange alternerende rekker konvergerer, så la oss prøve å finne en slik. Hvis $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ skal være en rekke med $a_n^2 = \frac{1}{n}$, så må vi ha

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \text{ eller } a_n = -\frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Ved å sette

$$a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

får vi en alternerende rekke

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}$$

som konvergerer ved alternerende rekke-testen. Leddene i denne rekken tilfredsstiller det vi ønsker:

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \cdot \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} = \frac{1}{n}.$$

La nå $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ og $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ være to konvergente rekker, hvorav en av dem, f.eks. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, konvergerer absolutt. Kan det da være slik at rekken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ divergerer? Det at rekken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergerer absolutt vil si at rekken $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ også konvergerer. Det samme kan vi i utgangspunktet ikke si om rekken $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, men siden den konvergerer vet vi f.eks. at leddene må gå mot 0:

$$\lim_{n\to\infty} b_n = 0.$$

Kan dette hjelpe oss? Vel, siden leddene går mot 0 må følgen $b_1, b_2, b_3, \dots$ være begrenset, det vil si at det finnes et positivt tall $K > 0$ slik at

$$|b_n| \le K$$

for alle n. Dette kan vi bruke til å vise at rekken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ faktisk konvergerer absolutt. Vi får nemlig at

$$0 \le |a_n b_n| = |a_n| \cdot |b_n| \le K|a_n|$$

for alle n, og siden rekken $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergerer har vi et sammenligningsresultat for positive rekker som sier at da må rekken $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n|$ også konvergere. Dette betyr at rekken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konvergerer absolutt, og fra teorien følger det da at rekken selv også konvergerer. Så svaret er

$$\boxed{\text{nei, det samme kan ikke skje hvis en av rekkene i tillegg konvergerer absolutt.}}$$