Oppgave 1 Den rasjonale funksjonen p er definert som

$$p(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{3x^2 - 5x + 2}.$$

Finn de tre grenseverdiene $\lim_{x\to 0} p(x)$, $\lim_{x\to 1} p(x)$ og $\lim_{x\to\infty} p(x)$.

Løsning:

$$\lim_{x\to 0} p(x) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 - 3x + 2}{3x^2 - 5x + 2} = \frac{2}{2} = 1.$$

Da $\lim_{x\to 1} x^2 - 3x + 2 = \lim_{x\to 1} 3x^2 - 5x + 2 = 0$, $x^2 - 3x + 2$ og $3x^2 - 5x + 2$ er deriverbare på intervallet $(0, 1)$, $\frac{d}{dx}(3x^2 - 5x + 2) = 6x - 5 \neq 0$ for $x \in (0, 1)$ og

$$\lim_{x\to 1} \frac{\frac{d}{dx}(x^2 - 3x + 2)}{\frac{d}{dx}(3x^2 - 5x + 2)} = \lim_{x\to 1} \frac{2x - 3}{6x - 5} = \frac{-1}{1} = -1$$

følger det av L'Hopitals regel at

$$\lim_{x\to 1} p(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{3x^2 - 5x + 2} = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{d}{dx}(x^2 - 3x + 2)}{\frac{d}{dx}(3x^2 - 5x + 2)} = -1.$$

Alternativt kan man finne grenseverdien $\lim_{x\to 1} p(x)$ ved å innse at $x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$ og $3x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(3x - 2)$, så

$$\lim_{x\to 1} p(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{3x^2 - 5x + 2} = \lim_{x\to 1} \frac{(x - 1)(x - 2)}{(x - 1)(3x - 2)} = \lim_{x\to 1} \frac{x - 2}{3x - 2} = -1.$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} p(x) &= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - 3x + 2}{3x^2 - 5x + 2} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{1 - 3/x + 3/x^2}{3 - 5/x + 2/x^2} \\
&= \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

Oppgave 2 La funksjonen f være gitt ved $f(x) = 2e^{-x^2} - x$.

a) Vis at det finnes ett, og kun ett, tall $c \in (0, 1)$ slik at $f(c) = 0$.

Løsning: Ettersom f er kontinuerlig og $f(0) = 2 > 0$ og

$$f(1) = 2e^{-1} - 1 = \frac{2-e}{e} < 0$$

fordi $e > 2$, så sier skjæringssetningen at det må finnes et tall $c \in (0,1)$ slik at $f(c) = 0$.

Nå er $f'(x) = -4xe^{-x^2} - 1 < 0$ for alle $x \in [0,1]$. Dermed er f synkende på hele intervallet og kan krysse x-aksen kun én gang. Altså, det finnes ett, og kun ett, tall $c \in (0,1)$ slik at $f(c) = 0$.

b) La R være området i første kvadrant begrenset av koordinataksene og kurven $y = f(x)$. Vis at volumet, V, av omdreiningslegemet som fremkommer ved å rotere R om y-aksen er gitt ved

$$V = \frac{\pi}{3}(6 - 3c - 2c^3).$$

Løsning: Et sylinderskall med y-aksen som sentrum, radius x, høyde $f(x)$ og tykkelse dx har volum

$$dV = 2\pi x f(x)\,dx.$$

Summen av alle disse skallene med radius fra $x = 0$ til $x = c$ er dermed

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_0^c x f(x)\,dx \\ &= 2\pi \int_0^c \left(2xe^{-x^2} - x^2\right)\,dx. \end{aligned}$$

Med substitusjonen $u = x^2$ er $du = 2x\,dx$ og

$$\begin{aligned} \int_0^c 2xe^{-x^2}\,dx &= \int_0^{c^2} e^{-u}\,du \\ &= -\Big|_0^{c^2} e^{-u} \\ &= 1 - e^{-c^2} \\ &= 1 - \frac{c}{2}, \end{aligned}$$

der den siste likheten kommer av at $2e^{-c^2} - c = 0$. Videre er $\int_0^c x^2\,dx = c^3/3$, så

$$V = 2\pi\left(1 - \frac{c}{2} - \frac{c^3}{3}\right) = \frac{\pi}{3}\left(6 - 3c - 2c^3\right).$$

c) Finn c med en nøyaktighet på tre desimaler vha. Newtons metode og bruk dette til å anslå en tilnærmet verdi av V.

Løsning: Vi setter

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n + \frac{2e^{-x_n^2} - x_n}{4x_n e^{-x_n^2} + 1}.$$

Med startverdien $x_0 = 1/2$ får vi iterasjonen

$$\begin{aligned} x_0 &= 0.5 \\ x_1 &= 0.91351 \\ x_2 &= 0.89598 \\ x_3 &= 0.89605 \\ x_4 &= 0.89605 \end{aligned}$$

og vi tolker de stabile verdiene som at c, til tre desimaler, er $c = 0{,}896$, dvs. vi gjetter på at c tilhører intervallet $[0{,}8955, 0{,}8965)$. Da $f(0{,}8955) = 0{,}0014339 > 0$ og $f(0{,}8965) = -0{,}0011719 < 0$ ser vi at det er tilfellet, så c er, med en nøyaktighet på tre desimaler, lik 0,896.

Volumet av rotasjonslegemet er da

$$V \approx 1{,}961.$$

Oppgave 3 En funksjon f har verdi 1 og stigningstall $1/2$ i $x = 0$. Videre er $f''(0) = 1/2$ og generelt er den n'te-deriverte av f i 0 gitt ved

$$f^{(n)}(0) = \frac{n!}{2^n}, \qquad \text{for alle } n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Hvis f er analytisk på intervallet $(-2, 2)$, dvs. hvis $f(x)$ er lik sin Maclaurin-rekke (Taylor-rekke om 0) for alle $x \in (-2, 2)$, hva er $f(1)$?

Løsning: Ettersom f er lik sin Maclaurin-rekke, er

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{2^n n!} x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n \\ &= \frac{1}{1 - x/2} \\ &= \frac{2}{2 - x} \end{aligned}$$

for alle $x \in (-2, 2)$. Spesielt er

$$f(1) = \frac{2}{2-1} = 2.$$

Oppgave 4 Løs initialverdiproblemet

$$\frac{dy}{dx} = (y^2 + y)x, \quad y(\sqrt{2}) = \frac{e^2}{1 - e^2}.$$

Løsning: Ligningen $\frac{dy}{dx} = (y^2 + y)x$ er en separabel differensialligning. Hvis vi separarer de variable får vi $\frac{1}{y^2+y}\, dy = x\, dx$, hvorav følger at $\displaystyle\int \frac{dy}{y^2 + y} = \int x\, dx = \frac{x^2}{2} + c_1$.

For å utregne intergralet $\frac{1}{y^2+y}\, dy$ forsøker vi oss med delbrøkoppspalting: Da $y^2 + y = y(y+1)$ gjetter vi på at vi kan finne A og B slik at $\frac{A}{y} + \frac{B}{y+1} = \frac{1}{y^2+y}$. Da

$$\frac{A}{y} + \frac{B}{y+1} = \frac{A(y+1) + By}{y(y+1)} = \frac{(A+B)y + A}{y^2 + y}$$

har vi at $\frac{A}{y} + \frac{B}{y+1} = \frac{1}{y^2+y}$ hvis og bare hvis $A + B = 0$ og $A = 1$. Vi har altså at $\frac{1}{y^2+y} = \frac{1}{y} - \frac{1}{y+1}$ og dermed at

$$\int \frac{dy}{y^2 + y} = \int \frac{1}{y} - \frac{1}{y+1}\, dy = \ln(y) - \ln(y+1) + c_2.$$

Det følger at $\ln(y) - \ln(y+1) = x^2/2 + c$ for en konstant c. Da $y(\sqrt{2}) = \frac{e^2}{1-e^2}$ følger det at $c = \ln(\frac{e^2}{1-e^2}) - \ln(\frac{e^2}{1-e^2}+1) - 1 = \ln(\frac{e^2}{1-e^2}) - \ln(\frac{1}{1-e^2}) - 1 = \ln(e^2) - 1 = 2 - 1 = 1$. Vi har altså at $\ln(y) - \ln(y+1) = x^2/2 + 1$. Da

$$\begin{aligned} \ln(y) - \ln(y+1) = x^2/2 + 1 &\iff e^{\ln(y)-\ln(y+1)} = e^{x^2/2+1} \\ &\iff \frac{y}{y+1} = e^{x^2/2+1} \\ &\iff y = (y+1)e^{x^2/2+1} \\ &\iff y(1 - e^{x^2/2+1}) = e^{x^2/2+1} \\ &\iff y = \frac{e^{x^2/2+1}}{1 - e^{x^2/2+1}} \end{aligned}$$

følger det at $y(x) = \frac{e^{x^2/2+1}}{1-e^{x^2/2+1}}$ er løsningen til initialverdiproblemet

$$\frac{dy}{dx} = (y^2 + y)x, \quad y(\sqrt{2}) = \frac{e^2}{1 - e^2}.$$

Oppgave 5 Funksjonen g er gitt ved

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\sin(x/2)}{x}, & x \neq 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{\pi}}, & x = 0. \end{cases}$$

a) Vis at g er en kontinuerlig og jevn funksjon. (En funksjon f er **jevn** hvis $f(-x) = f(x)$ for alle x i domenet til f).

Løsning: g er åpenbart kontinuerlig for alle x bortsett muligens i $x = 0$. Det må altså vises at

$$\lim_{x \to 0} g(x) = g(0).$$

Nå er

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0} g(x) &= \lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\sin(x/2)}{x} \\ &= \lim_{x \to 0} \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{\sin(x/2)}{x/2} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \\ &= g(0) \end{aligned}$$

på grunn av den velkjente grensen $\lim_{\theta\to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1$. Alternativt kan grensen beregnes ved l'Hôpital.

g er en jevn funksjon fordi sin er en odde funksjon og for alle $x \neq 0$ er

$$\begin{aligned} g(-x) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\sin(-x/2)}{-x} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{-\sin(x/2)}{-x} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\sin(x/2)}{x} \\ &= g(x). \end{aligned}$$

Trivielt er også $g(-0) = g(0)$.

b) La A være området i planet begrenset av kurven $y = g(x)$ og linjene $y = 0$, $x = 1$ og $x = -1$. Vis at legemet som fremkommer ved å rotere A om x-aksen har volum

$$V = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n)!(2n-1)}$$

og estimér volumet med en feil mindre enn $\epsilon = \frac{1}{200000}$.

Hint:

$$\sin^2 t = \frac{1-\cos 2t}{2}, \quad \text{og} \quad \cos t = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n)!}$$

for alle reelle tall t.

Løsning: En skive i x med radius $g(x)$ og tykkelse dx har volum

$$dV = \pi g^2(x)\, dx.$$

Volumet av omdreiningslegemet er summen av alle skiver fra $x = -1$ til $x = 1$:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-1}^{1} g^2(x)\, dx \\ &= 2\pi \int_0^1 g^2(x)\, dx \\ &= 2\pi \int_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\sin(x/2)}{x} \right)^2 dx \\ &= 2 \int_0^1 \frac{\sin^2(x/2)}{x^2}\, dx \\ &= \int_0^1 \frac{1-\cos x}{x^2}\, dx \end{aligned}$$

der den andre likheten kommer av at g er jevn, noe som medfører at g^2 er jevn. Den trigonometriske identiteten i hintet ble brukt i den siste likheten.

Nå er

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

så

$$\begin{aligned} 1-\cos x &= 1-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \end{aligned}$$

og

$$\frac{1-\cos x}{x^2} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-2}}{(2n)!}.$$

Ettersom dette er en absolutt konvergerende rekke kan den integreres ledd for ledd, og dermed er

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-2}}{(2n)!}\,dx \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n)!}\int_0^1 x^{2n-2}\,dx \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n)!}\bigg|_0^1 \frac{x^{2n-1}}{2n-1} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n)!(2n-1)}. \end{aligned}$$

La $a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{(2n)!(2n-1)}$ og

$$s_N = \sum_{n=1}^{N} a_n.$$

Ettersom V er en konvergerende alternerende rekke, er

$$\begin{aligned} |V - s_N| &\le |a_{N+1}| \\ &= \frac{1}{(2(N+1))!(2(N+1)-1)} \\ &= \frac{1}{(2N+2)!(2N+1)}. \end{aligned}$$

Vi finner nå den minste N slik at denne nevneren er større enn $1/\epsilon = 200000$:

N	(2N+2)!(2N + 1)
1	72
2	3600
3	282240

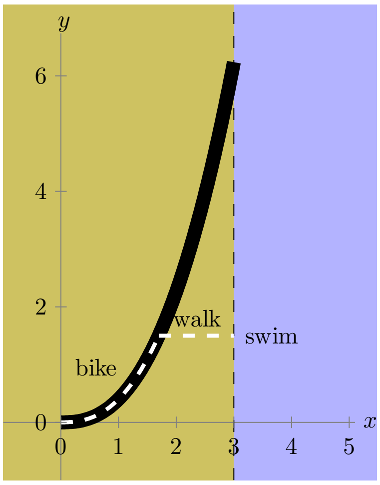
Dermed er $|V - s_3| < \epsilon$ og

$$\begin{aligned} V &\approx s_3 \\ &= a_1 + a_2 + a_3 \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{72} + \frac{1}{3600} \\ &= 0.486389 \end{aligned}$$

med en nøyaktighet på 1/200000.

Oppgave 6

Du bor 3 km fra havet, og fra huset ditt i origo (se figur 1) går det en vei langs kurven $25y^2 = 4x^5$, $x \in [0, 3]$, $y \geq 0$ ned til stranden som ligger på linjen $x = 3$. En dag bestemmer du deg for å sykle eller gå ned til stranden for å bade. Når du sykler må du sykle på veien, men du kan når som helst parkere sykkelen og gå det siste stykket i en rett linje vinkelrett mot strandkanten (det spiller ingen rolle hvor på stranden du bader).



Figur 1: Illustrasjon til oppgave 6

a) På hvilket punkt (x, y) på veien vil du parkere sykkelen og begynne å gå dersom du ønsker å komme frem på kortest mulig tid når du vet at du sykler 3 ganger raskere enn du går? Husk å bevise at din løsning faktisk gir den korteste reisetiden.

(Vi antar at både gang- og syklehastigheten er konstant.)

Løsning Fordi $y \geq 0$, kan veien beskrives eksplisitt ved

$$y(x) = \sqrt{\frac{4}{25}x^5} = \frac{2}{5}x^{5/2}$$

og lengden langs veien fra origo til punktet (x, y) er da

$$\int_0^x \sqrt{1 + (y'(t))^2}\, dt = \int_0^x \sqrt{1 + t^3}\, dt.$$

La v være ganghastigheten. Tiden det tar å sykle langs veien fra $(0, 0)$ til (x, y) med hastighet $3v$, og deretter gå fra (x, y) til $(3, y)$ med hastighet v, er dermed gitt ved

$$T(x) = \frac{1}{3v}\int_0^x \sqrt{1 + t^3}\, dt + \frac{3 - x}{v}.$$

Vi finner minimum til denne kontinuerlige funksjonen på det lukkede intervallet $[0,3]$. T har kritiske punkter der $T'(x) = 0$. Da

$$
\begin{aligned}
0 = T'(x) &= \frac{1}{3v}\sqrt{1+x^3} - \frac{1}{v} \\
\iff & \sqrt{1+x^3} = 3 \\
\iff & x = 2,
\end{aligned}
$$

og ettersom T ikke har singulære punkter, har T sitt minimum enten i $x = 0, x = 2$ eller $x = 3$. Nå er

$$
\begin{aligned}
T''(x) &= \frac{x^2}{2v\sqrt{1+x^3}} \\
&> 0
\end{aligned}
$$

for alle $x \in (0,3]$. Altså er T' stigende på hele intervallet og ettersom T' er kontinuerlig og $T'(2) = 0$, så er T' negativ på $[0,2)$ og positiv på $(2,3]$. Dermed er T minkende på $[0,2)$ og stigende på $(2,3]$ hvilket beviser at $x = 2$ er et absolutt minimum for T.

For å komme raskest frem til stranden skal man parkere sykkelen i punktet

$$
(x, y(x)) = \left(2, \frac{8}{5}\sqrt{2}\right).
$$

Alternativt bevis for at $x = 2$ er et absolutt minimum: For $t > 2$ er $\sqrt{1+t^3} > 3$ og dermed er

$$
\int_2^3 \sqrt{1+t^3}\,dt > (3-2)\cdot 3 = 3.
$$

Det følger da at

$$
\begin{aligned}
vT(2) &= \frac{1}{3}\int_0^2 \sqrt{1+t^3}\,dt + 1 \\
&< \frac{1}{3}\int_0^2 \sqrt{1+t^3}\,dt + \frac{1}{3}\int_2^3 \sqrt{1+t^3}\,dt \\
&= vT(3).
\end{aligned}
$$

For $0 \leq t < 2$ er $\sqrt{1+t^3} < 3$ og

$$
\int_0^2 \sqrt{1+t^3}\,dt < (2-0)\cdot 3 = 6.
$$

Det følger da at

$$\begin{aligned} vT(2) &= \frac{1}{3}\int_0^2 \sqrt{1+t^3}\,dt + 1 \\ &< \frac{1}{3}6 + 1 \\ &= 3 \\ &= vT(0). \end{aligned}$$

Altså er $T(2) < T(0)$ og $T(2) < T(3)$ og $x = 2$ er et absolutt minimum.

b) La funksjonen f være gitt ved $f(x) = \sqrt{1+x^3}$. For $0 \le x \le 2$ er $|f''(x)| \le 3/2$ (du behøver ikke å vise det). Bruk trapesmetoden for å finne tallet

$$I = \int_0^2 \sqrt{1+x^3}\,dx$$

med en feil mindre eller lik $1/16$. Kan du ut ifra denne tilnærmingen konkludere med at det tar mindre enn 21 minutter å dra ned til stranden på raksest mulig måte når ganghastigheten er $v = 6$ km/t?

Løsning: Feilformelen for trapesmetoden gir

$$\begin{aligned} |I - T_n| &\le \frac{3}{2}\frac{(b-a)^3}{12n^2} \\ &= \frac{3}{2}\frac{2^3}{12n^2} \\ &= \frac{1}{n^2} \end{aligned}$$

som er mindre eller lik $1/16$ hvis $n = 4$. La $x_i = i/2$ og $y_i = f(x_i)$ for $i = 0, \dots, 4$. Da er

$$\begin{aligned} I &\approx T_4 \\ &= \frac{b-a}{n}\left(\frac{1}{2}y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + \frac{1}{2}y_4\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{4} + \sqrt{2} + \frac{\sqrt{70}}{4} + \frac{3}{2}\right) \\ &= 1 + \frac{7+\sqrt{35}}{8}\sqrt{2} \\ &\approx 3.283 \end{aligned}$$

med en nøyaktighet på $1/16$.

Tiden det tar, i timer, å dra ned til stranden på raskest mulig måte når ganghastigheten er 6 km/t, er

$$\begin{aligned} T(2) &= \frac{1}{3 \cdot 6} \int_0^2 \sqrt{1+x^3}\, dx + \frac{1}{6} \\ &= \frac{I}{18} + \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Vi vet at $T_4 - \frac{1}{16} \leq I \leq T_4 + \frac{1}{16}$, så

$$\begin{aligned} T(2) &\leq \frac{T_4 + 1/16}{18} + \frac{1}{6} \\ &\approx 0.3525 \\ &= 21.15 \text{ minutter} \end{aligned}$$

så vi kan **ikke** konkludere med at det er mulig å gjøre dette på mindre enn 21 minutter.

Ekstra:
Det kan vises at $f''(x) \geq 0$ på intervallet $[0, 2]$. Trapesmetoden vil alltid gi et estimat som er **større** enn enn den virkelige verdien av integraler av konvekse funksjoner fordi alle rette linjer mellom to punkter på grafen vil ligge over grafen. Altså er

$$T_4 - \frac{1}{16} \leq I \leq T_4$$

og

$$\begin{aligned} T(2) &\leq \frac{T_4}{18} + \frac{1}{6} \\ &\approx 0.3491 \\ &= 20.94 \text{ minutter} \end{aligned}$$

og vi ser at reisetiden faktisk **er** mindre enn 21 minutter. Begge svar, bra begrunnet, godtas.