TMA4100 Matematikk 1
Løsningsforslag

Eksamen 9. august 2016

1 Implisitt derivasjon med hensyn på x gir

$$y^3 + 3xy^2 \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + e^{xy}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + y^2 + xy\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) + 2x = 0,$$

som innsatt for $(x, y) = (1, 1)$ gir

$$3 + 3\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{(x,y)=(1,1)} + \left(1 + 2\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{(x,y)=(1,1)}\right)e = 0.$$

Det vil si,

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{(x,y)=(1,1)} = -\frac{e+3}{2e+3}.$$

Ligningen til tangenten til kurven i punktet $(x, y) = (1, 1)$ er så gitt ved

$$y = 1 - \frac{e+3}{2e+3}(x-1).$$

2 Observer at

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \frac{1}{x}y = e^x$$

er en 1. ordens lineær differensialligning med $p(x) = 1/x$ og $q(x) = e^x$. Da $x > 0$ får vi at $\mu(x) = \ln x$ og $e^{\mu(x)} = x$ slik at

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[xy] = xe^x.$$

Integrasjon med hensyn på x gir så

$$xy = \int xe^x \,\mathrm{d}x + C.$$

Det vil si,

$$y = \frac{1}{x}\left(\int xe^x \,\mathrm{d}x + C\right)$$

der $x > 0$.

Altså er

$$y(x) = \frac{1}{x}\left(\int xe^x \,\mathrm{d}x + C\right) = \frac{1}{x}\left(xe^x - e^x + C\right)$$

der den siste likheten fremkommer ved delvis integrasjon. Innsatt for $y(1) = 4$ får vi at $C = 4$. Dermed er

$$y(x) = \frac{(x-1)e^x + 4}{x}.$$

3 Observer at $x^2 + x - 2 = (x+2)(x-1)$. Polynomdivisjon gir at

$$\frac{x^3+1}{x^2+x-2} = x - 1 + \frac{3x-1}{x^2+x-2} = x - 1 + \frac{3x-1}{(x+2)(x-1)}.$$

Delbrøkoppspalting gir at

$$\frac{3x-1}{(x+2)(x-1)} = \frac{1}{3}\left(\frac{7}{x+2} + \frac{2}{x-1}\right).$$

Dermed er

$$\begin{aligned}
\int_2^4 \frac{x^3+1}{x^2+x-2}\,\mathrm{d}x &= \int_2^4 \left(x-1+\frac{1}{3}\left(\frac{7}{x+2}+\frac{2}{x-1}\right)\right)\mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{3}\left(7\ln|x+2| + 2\ln|x-1|\right)\right]_2^4 \\
&= 4 + \frac{1}{3}\left(7\ln 6 + 2\ln 3\right) - \frac{7}{3}\ln 4 \\
&= 4 + 3\ln 3 - \frac{7}{3}\ln 2
\end{aligned}$$

der den siste likheten fremkommer ved å utnytte at $\ln 6 = \ln 3 + \ln 2$.

$\boxed{4}$ Dersom h er kontinuerlig i $x = 0$ må $\lim_{x\to 0} h(x) = h(0)$. Fra observasjonen om at $\cos x = 1 - x^2/2! + x^4/4! + O(x^6)$ følger det at

$$h(x) = \frac{1}{4!} + O(x^2).$$

Det gir at

$$\lim_{x\to 0} h(x) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{4!} + O(x^2)\right) = \frac{1}{4!} = \frac{1}{24}.$$

Altså må $h(0) = 1/24$ for at h skal være kontinuerlig i $x = 0$.

$\boxed{5}$ Arealet av rotasjonsflaten er gitt ved

$$\begin{aligned}
A &= 2\pi\int_0^8 |f(x)|\sqrt{1+(f'(x))^2}\,\mathrm{d}x \\
&= 2\pi\left(\int_0^4 \sqrt{x}\sqrt{1+\left(\frac{1}{2}x^{-1/2}\right)^2}\,\mathrm{d}x + \int_4^8 \sqrt{8-x}\sqrt{1+\left(-\frac{1}{2}(8-x)^{-1/2}\right)^2}\,\mathrm{d}x\right) \\
&= 2\pi\left(\int_0^4 \sqrt{x+\frac{1}{4}}\,\mathrm{d}x + \int_4^8 \sqrt{\frac{33}{4}-x}\,\mathrm{d}x\right) \\
&= 2\pi\left(\left[\frac{2}{3}\left(x+\frac{1}{4}\right)^{3/2}\right]_0^4 + \left[-\frac{2}{3}\left(\frac{33}{4}-x\right)^{3/2}\right]_4^8\right) \\
&= \frac{\pi}{3}\left(17^{3/2}-1\right).
\end{aligned}$$

$\boxed{6}$ La $g(x) = 1/(1-x)$. Da er

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n.$$

for $-1 < x < 1$, som igjen gir at

$$g(-x) = \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$$

for $-1 < x < 1$. Leddvis integrasjon gir så

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1}$$

for $-1 < x < 1$. Altså er

$$f(x) = \ln(1+2x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} (2x)^{n+1}$$

for $-1/2 < x < 1/2$, som betyr at taylorrekken til f rundt 0 har konvergensradius $1/2$.

$\boxed{7}$ Vi ser først på de kritiske punktene til h. I vårt tilfelle er

$$h'(x) = \frac{x-1}{|x-1|} + 2x + 2,$$

som gir at $h'(x) = 0$ har løsning $x = -1/2$.

Fra uttrykket for $h'(x)$ ser vi at $x = 1$ er et singulært punkt.

Da $h(-2) = 3, h(-1/2) = 3/4, h(1) = 3$ og $h(2) = 9$, tar h sitt absolutte maksimum i $x = 2$, og sitt absolutte minimum i $x = -1/2$.

$\boxed{8}$ Observer at f er en kontinuerlig funksjon, der $f(-1) = e+5+2 = e+7 > 0$ og $f(1) = e-5+2 = e-3 < 0$. Skjæringssetningen gir så at det finnes et tall $c \in (-1,1)$ slik at $f(c) = 0$.

$\boxed{9}$ **a)** Formlike trekanter gir at

$$\frac{b}{5} = \frac{4-h}{4}$$

slik at $b = (20-5h)/4$. Arealet som funksjon av h er så gitt ved

$$A(h) = hb = \frac{20h - 5h^2}{4} = 5h\left(1 - \frac{1}{4}h\right).$$

b) Vi ønsker å finne h slik at $A(h)$ er størst mulig. I vårt tilfelle er

$$A'(h) = 5 - \frac{5}{2}h$$

slik at $A'(h) = 0$ har løsning $h = 2$. Vi har ingen singulære punkter og endepunktene er uinteressante. Det maksimale arealet (i m^2) til fronten er så gitt ved

$$A(2) = 10\left(1 - \frac{1}{2}\right) = 5.$$