Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Ivar Amdal   tlf. 73 59 34 68

EKSAMEN I FAG SIF5003/04 MATEMATIKK 1/1A

Mandag 3. august 1998
Tid: 0900–1400

Hjelpemidler: Typegodkjent kalkulator med tomt minne,
Rottmann: *Matematisk formelsamling.*

Oppgave 1
Bestem grenseverdiene

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^3}-1}{x-\sin x} \qquad \text{og} \qquad \lim_{x\to\infty} x\ln\left(1+\frac{3}{x}\right).$$

Oppgave 2
Avgjør om rekkene konvergerer eller divergerer:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2} \qquad \text{og} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}.$$

Oppgave 3

a) La a og b være gitte konstanter, $a > b > 0$. Undersøk om funksjonen

$$f(x) = \arctan\frac{a}{x} - \arctan\frac{b}{x}, \qquad 0 < x < \infty$$

har noen største og/eller noen minste verdi, og finn eventuelt disse/denne.

b) Gitt punktene $A(0,4)$, $B(0,1)$ og $C(x,0)$ der $x > 0$. Bestem x slik at vinkelen

$$u = \angle ACB$$

blir størst mulig. Hva blir den maksimale verdien for u?

Oppgave 4

La K være grafen til ligningen

$$x^2y^3 + (y+1)e^{-x} = x + 2.$$

a) Finn dy/dx i punktet $(0,1)$? Finn ligningen for tangenten til K i punktet $(0,1)$ og bestem tangentens skjæringspunkt med x-aksen.

b) Gjør rede for at K har nøyaktig ett skjæringspunkt med x-aksen. Bruk Newtons metode til å finne x-koordinaten til dette skjæringspunktet med 2 riktige desimaler.

Oppgave 5

En vanntank fremkommer ved at kurven $y = x^2$, $0 \le x \le 2$, dreies om y-aksen. Både x og y måles i meter (m).

a) Anta at tanken er fylt med vann til en høyde av h (m). Vis at da er volumet (m^3) av vannet i tanken gitt ved:

$$V = V(h) = \frac{\pi h^2}{2}.$$

b) Vi tenker oss nå at tanken er tom, og fylling av tanken med vann begynner. Vannet renner inn i tanken med konstant volum 1 (m^3) pr. tidsenhet (time). Hvor fort stiger vannhøyden i det øyeblikket vannhøyden i tanken er 1 (m)?

c) Fyllingen av tanken stopper når vannhøyden er blitt 2 (m). Tanken skal nå tømmes for vann gjennom et lite hull i bunnen av tanken. Vi antar at vannet som renner ut av tanken pr. tidsenhet hele tiden er proporsjonal med kvadratroten av vannhøyden.

Vis at vannhøyden $h = h(t)$ tilfredsstiller differensialligningen

$$\sqrt{h}\,\frac{dh}{dt} = -k, \qquad \text{der } k \text{ er en positiv konstant.}$$

d) Når tømmingen har pågått i 3 timer er vannhøyden i tanken 1 (m). Løs differensialligningen i **c)**, og finn et uttrykk for $h(t)$. Hvor lang tid tar det før tanken er tom?

Oppgave 6

a) Gjør rede for at hvis $|u| < 1$ så er

$$\int_0^u \frac{1}{1+x^9}\,dx = u - \frac{u^{10}}{10} + \frac{u^{19}}{19} - \frac{u^{28}}{28} + \cdots + (-1)^n \frac{u^{9n+1}}{9n+1} + \cdots.$$

b) Bruk resultatet i **a)** til å vise at verdien av integralet

$$\int_0^{1/2} \frac{1}{1+x^9}\,dx$$

ligger mellom 0,4999 og 0,5000.