



Faglig kontakt under eksamen:

Ivar Amdal tlf. 73 59 34 68

Trond Digernes tlf. 73 59 35 17

Bjørn Dundas tlf. 73 55 02 42

Lisa Lorentzen tlf. 73 59 35 48

EKSAMEN I FAG SIF5003 MATEMATIKK 1

Onsdag 9. desember 1998

Tid: 0900–1400

Hjelpemidler: Typegodkjent kalkulator med tomt minne,
Rottmann: *Matematisk formelsamling*.

Oppgave 1 kan besvares uten begrunnelse. På de andre oppgavene må det være med så mye mellomregning at fremgangsmåten fremgår tydelig av besvarelsen.

Oppgave 1

i) Hvilket av integralene

$$(1) \int_*^{**} 2\pi(y+1) ds, \quad (2) \int_*^{**} 2\pi(y-1) ds \quad \text{eller} \quad (3) \int_*^{**} 2\pi(x-1) ds$$

ville du ta utgangspunkt i, hvis du skulle finne arealet av rotasjonsflata som dannes når en kurve $y = f(x)$ i første kvadrant dreies om den rette linje $y = -1$?

ii) Hvilket av uttrykkene

$$(1) \frac{A}{x^4} + \frac{B}{x^2}, \quad (2) \frac{A}{x^2} + \frac{Bx+C}{x^2+1} \quad \text{eller} \quad (3) \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$$

ville du ta utgangspunkt i, hvis du skulle finne delbrøkkoppstillingen for funksjonen

$$f(x) = \frac{x+1}{x^4+x^2} ?$$

(Koeffisientene skal *ikke* beregnes.)

Oppgave 2

La S betegne området i xy -planet begrenset av y -aksen og kurvene $y = \cos x$ og $y = \sin x$ for $0 \leq x \leq \pi/4$. Bestem volumet av rotasjonslegemet vi får når S dreies om linjen $x = \pi/4$.

Oppgave 3

I et veikryss gjelder ved et visst tidspunkt:

- En bil er 300 m øst for veikrysset og kjører med hastighet 70 km/h rett vestover.
- En buss er 400 m nord for veikrysset og kjører nordover med hastighet 60 km/h.

Er avstanden (i luftlinje) mellom bilen og bussen voksende eller avtagende ved dette tidspunktet, og hvor fort endres den?

Oppgave 4

Vis ved induksjon at for alle hele tall $n \geq 1$ er

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \cdots + n \cdot n! = (n + 1)! - 1.$$

Oppgave 5

I en vekstmodell for svin vil vi anta at dyrets vekt P (i kg) er P_0 ved $t = 0$ og vokser mot en grense L . Det antas at vekstraten (i kg/dag) på ethvert tidspunkt er proporsjonal med det antall kilo som svinet fortsatt kan legge på seg. Kall proporsjonalitetskonstanten k .

- Still opp en differensialligning for vekten P som funksjon av tiden t og løs den. Skisser formen på løsningskurven.
- Anta L og k kjent. Anta videre at det koster deg a kr/dag å fø et svin, og at du mottar b kr/kg for slakteklare svin. Hva skal slaktevekten være dersom du ønsker å tjene mest mulig på et svin? Angi svaret uttrykt ved L , k , a og b .

Oppgave 6

Vis at den uendelige rekken

$$(*) \quad \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{n-1}{n^2} \right)$$

er konvergent. Konvergerer rekken absolutt eller betinget? Partialsummen

$$S_9 = \sum_{n=2}^9 (-1)^{n+1} \left(\frac{n-1}{n^2} \right)$$

er tilnærmet lik summen S av rekken $(*)$. Hva kan du, uten bruk av kalkulator, si om differansen $S - S_9$?

Oppgave 7

Funksjonen f er definert ved

$$f(x) = \int_0^x \frac{\arctan t}{t^6 + 1} dt.$$

- a) Bestem $f(0)$, $f'(0)$ og $f''(0)$, og finn Taylorpolynomet $P_2(x)$ av grad 2 i $a = 0$ for f .
- b) Bruk Taylors formel med restledd og med $n = 2$ til å finne en øvre og en nedre skranke for $f(0.4)$ (dvs. finn tall U og L slik at $L \leq f(0.4) \leq U$) når det oppgis at

$$-1 \leq f'''(x) \leq 0 \quad \text{for } 0 \leq x \leq 0.4.$$

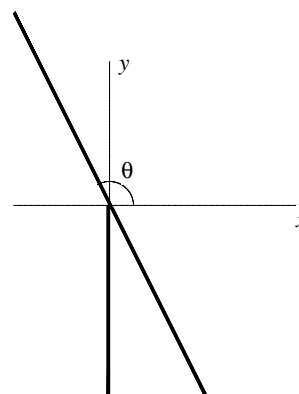
Finn også en tilnærmet verdi for $f(0.4)$ ved å bruke Simpsons metode med $n = 4$ delintervaller på integralet

$$\int_0^{0.4} \frac{\arctan t}{t^6 + 1} dt.$$

Oppgave 8

- a) En 4 meter lang stige ligger an mot et 2 meter høyt loddrett plankegjerdet (se figur). Anta at stigen starter fra loddrett stilling, og at foten av stigen glir horisontalt langs bakken helt til toppen av stigen akkurat berører toppen av plankegjerdet. Innfør et koordinatsystem med origo i plankegjerdets topp-punkt og positiv y -akse langs plankegjerdets forlengelse oppover. Vis at toppen av stigen beskriver en kurve som i polarkoordinater har ligning

$$r = 4 - \frac{2}{\sin \theta}.$$



Over hvilket intervall varierer polarvinkelen θ under denne bevegelsen?

- b) En 6 meter høy husvegg står 1 meter til venstre for plankegjerdet. Vil stigen treffe husveggen under en bevegelse som i a)? Se bort fra plankegjerdets tykkelse, og begrunn svaret ved regning.