SIF5003 Matematikk 1
9. desember 1998

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Løsningsforslag

Oppgavesettet har 11 punkter: 1, 2, 3, 4, 5ab, 6, 7ab, 8ab, som teller likt ved bedømmelsen.

$\boxed{1}$ **i)** alternativ (1), **ii)** alternativ (3).

$\boxed{2}$ Her er sylinderskallmetoden best. Volumet av et sylinderskall er $dV = 2\pi rh\,dx$ der $r = \pi/4 - x$ og $h = y_2 - y_1 = \cos x - \sin x$. Volumet av rotasjonslegemet blir da, ved delvis integrasjon,

$$
\begin{aligned}
V &= \int_*^{**} dV = 2\pi \int_0^{\pi/4} (\pi/4 - x)(\cos x - \sin x)\,dx \\
&= 2\pi \Big[(\pi/4 - x)(\sin x + \cos x) - \int (-1)(\sin x + \cos x)\,dx\Big]_0^{\pi/4} \\
&= 2\pi \Big[(\pi/4 - x)(\sin x + \cos x) + (-\cos x + \sin x)\Big]_0^{\pi/4} = -2\pi(\pi/4 - 1) = \pi(2 - \pi/2).
\end{aligned}
$$

$\boxed{3}$ La $x(t)$ og $y(t)$ være x- og y-koordinaten til bilen og bussen ved tidspunktet t, med veikrysset i origo. Avstanden z i luftlinje mellom bilen og bussen er da gitt ved

$$z^2 = x^2 + y^2.$$

Ved derivasjon mhp. t får vi

$$2z\frac{dz}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt}.$$

Når $x = 0{,}3$, $dx/dt = -70$, $y = 0{,}4$ og $dy/dt = 60$, er $z = \sqrt{0{,}3^2 + 0{,}4^2} = 0{,}5$ og

$$2 \cdot 0{,}5\frac{dz}{dt} = 2 \cdot 0{,}3 \cdot (-70) + 2 \cdot 0{,}4 \cdot 60 \qquad \text{som gir} \qquad \frac{dz}{dt} = 6.$$

Avstanden mellom bil og buss *øker* altså med 6 km/h ved dette tidspunktet.

$\boxed{4}$ Vi skal vise formelen

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \cdots + n \cdot n! = (n+1)! - 1, \qquad n \geq 1,$$

ved induksjon. For $n = 1$ er formelen rett siden venstresiden bare har ett ledd $1 \cdot 1! = 1$ og høyresiden er $2! - 1 = 1$. Anta som induksjonshypotese at

$$(*) \qquad 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \cdots + k \cdot k! = (k+1)! - 1.$$

Da er

$$
\begin{aligned}
&1\cdot 1! + 2\cdot 2! + 3\cdot 3! + \cdots + (k+1)\cdot(k+1)! \\
&\quad = \big[1\cdot 1! + 2\cdot 2! + 3\cdot 3! + \cdots + k\cdot k!\big] + (k+1)\cdot(k+1)! \\
&\quad \overset{(*)}{=} \big[(k+1)! - 1\big] + (k+1)\cdot(k+1)! = (k+2)\cdot(k+1)! - 1 = (k+2)! - 1.
\end{aligned}
$$

Ved induksjon følger at den oppgitte formelen er riktig for alle hele tall $n \geq 1$.

$\boxed{5}$ **a)** Differensialligningen er

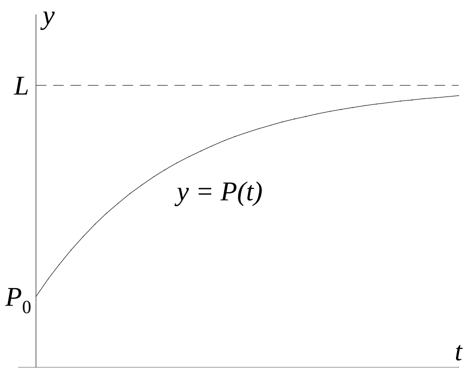
$$\frac{dP}{dt} = k(L-P), \qquad P(0) = P_0.$$

Ligningen er separabel (og har den konstante løsningen $P = L$). For $L - P \neq 0$ får vi, ved separarasjon av de variable og integrasjon,

$$
\begin{aligned}
\int \frac{dP}{L-P} &= \int k\,dt \\
-\ln(L-P) &= kt + C \\
L - P &= e^{-kt-C} \\
P &= L - Ae^{-kt} \qquad (A = e^{-C}).
\end{aligned}
$$

Med $P(0) = P_0$ blir $A = L - P_0$ og

$$P(t) = L - (L - P_0)e^{-kt}.$$



b) Fortjenesten F, hvis slaktevekten er P, er

$$F(t) = b\cdot P(t) - a\cdot t.$$

For å maksimalisere F deriverer vi mhp. t og bruker uttrykket for dP/dt fra **a)**:

$$\frac{dF}{dt} = b\cdot\frac{dP}{dt} - a = b\cdot k(L-P) - a = bkL - bkP - a.$$

Vi ser at $dF/dt = 0$ når

$$P = \frac{bkL - a}{bk} = L - \frac{a}{bk},$$

og dette gir maksimum siden

$$\frac{d^2F}{dt^2} = \frac{d}{dt}\Big(\frac{dF}{dt}\Big) = \frac{d}{dt}\Big[b\cdot k(L-P) - a\Big] = -bk\frac{dP}{dt} = -bk^2(L-P) < 0.$$

Vi får maksimal fortjeneste ved å slakte dyret når det veier $P = L - a/(bk)$ kg. (Hvis $L - a/(bk) \leq P_0$ må vi slakte straks, dvs. når $t = 0$.)

6 Rekken er alternerende, $\sum(-1)^{n+1}a_n$ med $a_n = (n-1)/n^2$. Vi sjekker at a_n er avtagende og at $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Med

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \quad \text{er} \quad f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3} = -\frac{x-2}{x^3} < 0 \quad \text{for } x > 2.$$

Funksjonen $f(x)$ (for $x \geq 2$), og følgelig $a_n = f(n)$, er altså avtagende. Siden

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}\right) = 0$$

er rekken $\sum(-1)^{n+1}a_n$ konvergent ifølge alternerende rekkers test.

For å avgjøre om konvergensen er absolutt eller betinget må vi undersøke rekken $\sum a_n$. Vi kan bruke grensesammenligningstesten og sammenligner med rekken $\sum b_n = \sum 1/n$ (den harmoniske rekken):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)/n^2}{1/n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2-n}{n^2} = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1 \quad (>0).$$

Siden den harmoniske rekken er divergent, som p-rekke med $p = 1 (\leq 1)$, er $\sum a_n$ divergent. (Vi kunne også brukt integraltesten for å vise at $\sum a_n$ divergerer.) Rekken $\sum(-1)^{n+1}a_n$ er altså betinget konvergent.

Rekkens "neste ledd" er $(-1)^{11}a_{10} = -9/100$. Ifølge alternerende rekkers restleddestimat er da $S - S_9$ negativ og $|S - S_9| < a_{10}$. Vi har altså

$$-0{,}09 < S - S_9 < 0.$$

7 **a)** Her er

$$f(0) = \int_0^0 \frac{\arctan t}{t^6+1}\,dt = 0, \qquad \text{og} \qquad f'(x) = \frac{\arctan x}{x^6+1}$$

ifølge integralregningens fundamentalteorem. Ved derivasjon får vi

$$f''(x) = \frac{(x^6+1)/(x^2+1) - 6x^5 \arctan x}{(x^6+1)^2}.$$

Dermed er

$$f(0) = 0, \qquad f'(0) = 0 \quad \text{og} \quad f''(0) = 1,$$

$$P_2(x) = f(0) + f'(0)x + \tfrac{1}{2}f''(0)x^2 = \tfrac{1}{2}x^2.$$

b) Taylors formel (med Taylorpolynomet fra **a)**) gir

$$f(0{,}4) = P_2(0{,}4) + R_2(0{,}4) = 0{,}080 + \frac{f'''(z)}{3!}0{,}4^3 \qquad \text{der } 0 \leq z \leq 0{,}4.$$

Siden $-1 \leq f'''(z) \leq 0$, blir $0{,}069 \leq f(0{,}4) \leq 0{,}080$.

Ved å bruke Simpsons metode med $n = 4$ delintervaller og skrittlengde $\Delta t = 0{,}1$ får vi

$$f(0{,}4) = \int_0^{0{,}4} \frac{\arctan t}{t^6+1}\,dt \approx S_4 = \frac{\Delta t}{3}\Big(y_0 + 4\cdot y_1 + 2\cdot y_2 + 4\cdot y_3 + y_4\Big),$$

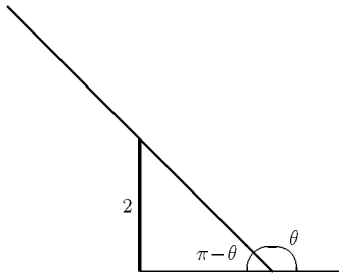
$$f(0{,}4) \approx \frac{0{,}1}{3}\Big(0 + 4\cdot 0{,}0997 + 2\cdot 0{,}1974 + 4\cdot 0{,}2912 + 0{,}3790\Big) = 0{,}0779\,,$$

$$f(0{,}4) \approx 0{,}078.$$

$\boxed{8}$ **a)** La $s = 4 - r$ være lengden av stigen mellom bakken og muren. Av figuren ser vi at $2 = s \cdot \sin(\pi - \theta)$. Følgelig er

$$r = 4 - s = 4 - \frac{2}{\sin(\pi - \theta)} = 4 - \frac{2}{\sin\theta}.$$

Videre ser vi at $\theta = \pi/2$ når stigen er loddrett, og at $\sin(\pi - \theta) = 2/4$, $\pi - \theta = \pi/6$, $\theta = 5\pi/6$ når stigens topp berører plankegjerdet. Ergo er $\theta \in \left[\pi/2, 5\pi/6\right]$.



b) Husveggen har ligning $x = -1$, og for x-koordinaten til stigens topp har vi

$$x = r\cos\theta = \left(4 - \frac{2}{\sin\theta}\right)\cos\theta = 4\cos\theta - 2\frac{\cos\theta}{\sin\theta}, \qquad \frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{5\pi}{6}.$$

Her er x negativ, og stigen vil gå klar av huset hvis $x_{\min} > -1$. Siden $x = 0$ når $\theta = \pi/2$ og når $\theta = 5\pi/6$, må minimumsverdien komme når $dx/d\theta = 0$:

$$\frac{dx}{d\theta} = -4\sin\theta - 2\frac{\sin\theta \cdot (-\sin\theta) - \cos\theta \cdot \cos\theta}{\sin^2\theta} = 2\frac{-2\sin^3\theta + 1}{\sin^2\theta}.$$

Vi ser at $dx/d\theta = 0$ når $\sin^3\theta = 1/2$, $\sin\theta = 2^{-1/3}$. Siden θ er i 2. kvadrant, er $\theta \approx 2{,}22$ ($127{,}5°$). Da er $\cos\theta = -\sqrt{1 - 2^{-2/3}} \approx -0{,}6083$ og følgelig $x_{\min} \approx -0{,}90$ (m). Den eksakte verdien er

$$\begin{aligned} x_{\min} &= -(4 - 2 \cdot 2^{1/3})(1 - 2^{-2/3})^{1/2} \\ &= -2 \cdot 2^{1/3}(2^{2/3} - 1)\frac{(2^{2/3} - 1)^{1/2}}{2^{1/3}} = -2(2^{2/3} - 1)^{3/2}. \end{aligned}$$

Stigen vil altså ha en klaring til husveggen på $1 - 2(2^{2/3} - 1)^{3/2} \approx 0{,}10$ meter.