Eksempel på føring, eksamen SIF5003, 1999-08-02

Oppg. 1

a) (i) $\ln(-x) > 2$

Eksponensiering gir

$$-x > e^2$$

og derav følger at $\underline{\underline{x < -e^2}}$ løser ulikheten.

(ii) $\frac{1}{(x-1)^2} < \frac{1}{4}$

Omforming gir

$$(x-1)^2 > 4 \iff |x-1| > 2$$

som medfører at

$$x-1 > 2 \quad \text{eller} \quad 1-x > 2$$

Disse er oppfylt for

$$\underline{\underline{x < -1 \quad \text{eller} \quad x > 3}}$$

b) (i) Skal bestemme grenseverdien

$$L = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x - \tan x}{x^3}$$

Har at

$$\frac{d}{dx} \tan x = \frac{d}{dx} \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos^2 x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x}$$

$$= \underline{1 + \tan^2 x}$$

Grenseverdien L er et $0/0$-uttrykk, så L'Hôpitals regel gir

$$L = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1 - \tan^2 x}{3x^2}$$

Dette er fremdeles $\frac{0}{0}$-uttrykk. Ny anvendelse av L'Hôpitals regel gir derfor

$$L = \lim_{x \to 0} \frac{-\sin x - 2\tan x\,(1+\tan^2 x)}{6x}$$

Dette er nok engang et $\frac{0}{0}$-uttrykk, men en siste anvendelse av L'Hôpitals regel gir

$$L = \lim_{x \to 0} \frac{-\cos x - 2(1+\tan^2 x) - 6\tan^2 x(1+\tan^2 x)}{6} = -\frac{3}{6} = \underline{\underline{-\frac{1}{2}}}$$

Oppg. 1

b) (ii) Skal bestemme grenseverdien

$$\lim_{x \to \infty} (e^{2x} - 2x)^{1/x}$$

La funksjonen f være gitt ved

$$f(x) = (e^{2x} - 2x)^{1/x}, \quad x > 0$$

Har da at

$$L = \lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} e^{\ln f(x)} = e^{\lim_{x \to \infty} \ln f(x)}$$

Ser derfor på

$$\tilde{L} = \lim_{x \to \infty} \ln f(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} \ln(e^{2x} - 2x)$$

Ved L'Hôpitals regel får vi

$$\tilde{L} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{e^{2x} - 2x}(2e^{2x} - 2)$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{2(e^{2x} - 1)}{e^{2x} - 2x}$$

$$= 2 \cdot \lim_{x \to \infty} \frac{1 - e^{-2x}}{1 - 2xe^{-2x}} = 2 \cdot 1 = \underline{2}$$

fordi $\lim_{x \to \infty} xe^{-2x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x}{e^{2x}} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{2e^{2x}} = 0$

Dette gir at

$$L = e^{\tilde{L}} = \underline{\underline{e^2}}$$

Oppg. 2

a) Skal vise at ligningen

$$2x = \cos x \qquad (*)$$

har én og bare én løsning.

La funksjonen f være gitt ved

$$f(x) = 2x - \cos x$$

slik at en løsning av $(*)$ er en løsning av $f(x)=0$

Har at $f'(x) = 2 + \sin x > 0$, så f er strengt voksende og kan derfor ha maksimalt ett nullpunkt.

Videre er f en kontinuerlig funksjon og vi har

$$f(-\tfrac{\pi}{2}) = -\pi$$

og

$$f(\tfrac{\pi}{2}) = \pi$$

så ved mellomverdisetningen (intermediate value property) har f minst ett nullpunkt.

Tilsammen gir dette at f har nøyaktig ett nullpunkt, hvilket betyr at $(*)$ har nøyaktig én løsning. $\square$

Newtons metode for løsning av $(*)$:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{2x_n - \cos x_n}{2 + \sin x_n}$$

Med $x_0 = 0.5$ får vi

n	x_n
0	0.5
1	0.4506267
2	0.4501836
3	0.4501836

Hvilket betyr at med fem sikre sifre er løsningen av $(*)$

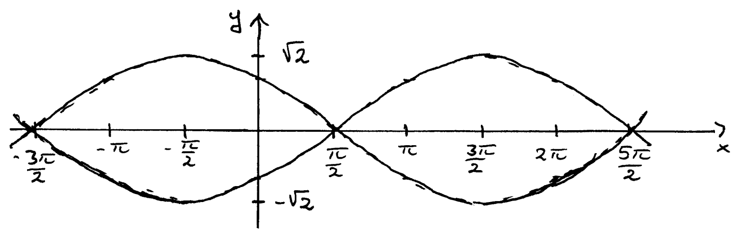
$$\underline{\underline{x = 0.45018}}$$

Oppg. 2

b) Punkter på kurven

$$y^2 + \sin x = 1$$

som ligger nærmest origo.



La $P(x,y)$ være et punkt på kurven.
Avstanden r fra origo til P er gitt ved

$$r^2 = x^2 + y^2 = x^2 + 1 - \sin x$$

Vi søker x som minimerer r^2. Derivasjon gir

$$2x - \cos x = 0 \qquad (*)$$

Det finnes ingen øvre begrensning på r, så et ekstremalpunkt for r er et minimum.

Fra a) har vi at en tilnærmet løsning av $(*)$ er

$$\underline{x = 0.45018}$$

Innsatt dette gir

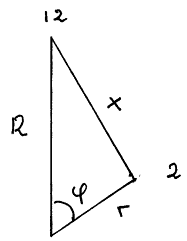
$$y = \pm\sqrt{1 - \sin x} = \pm 0.75158$$

Så punktene på kurven som ligger nærmest origo er

$$\underline{\underline{(x,y) = (0.45018,\ \pm 0.75158)}}$$

Oppg. 3

Endring pr. tid for avstanden mellom spissene på urvisene på Big Ben.



$R = 4 \text{ m}$
$r = 2 \text{ m}$
$\varphi = 2 \cdot \frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{3}$

Hastighet for minuttviser:

$$\omega_1 = -2\pi / h$$

Hastighet for timeviser:

$$\omega_0 = -\frac{2\pi}{12} / h = -\frac{\pi}{6} / h$$

Ved cosinus-setningen har vi at

$$x^2 = R^2 + r^2 - 2Rr\cos\varphi$$

hvor x er avstanden mellom viserspissene.

Implisitt derivasjon gir

$$2x \frac{dx}{dt} = 2Rr\sin\varphi \cdot \frac{d\varphi}{dt}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{Rr\sin\varphi}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr\cos\varphi}} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = a\frac{d\varphi}{dt}$$

Har at

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega_1 - \omega_0 = -2\pi/h - (-\tfrac{\pi}{6}/h) = \underline{-\tfrac{11}{6}\pi/h}$$

Videre er

$$\sin\varphi = \sin\frac{\pi}{3} = 2\sin\frac{\pi}{6}\cdot\cos\frac{\pi}{6} = 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{3} = \underline{\tfrac{1}{2}\sqrt{3}}$$

$$\cos\varphi = \sqrt{1-\sin^2\varphi} = \sqrt{1-3/4} = \underline{\tfrac{1}{2}}$$

slik at

$$a = \frac{4\cdot 2\cdot \frac{1}{2}\sqrt{3}}{\sqrt{16+4-2\cdot 4\cdot 2\cdot\frac{1}{2}}}\text{ m} = \frac{4\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}\text{ m} = \underline{2\text{ m}}$$

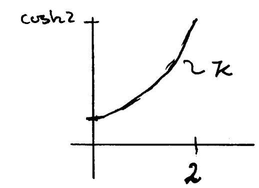
Dette betyr at

$$\frac{dx}{dt} = 2\text{m}\cdot(-\tfrac{11}{6}\pi/h) = \underline{\underline{-\tfrac{11}{3}\pi \text{ m/h}}}$$

Oppg. 4

K er kurven

$$y = \cosh x \quad , \quad 0 \le x \le 2$$



Lengde av K:

$$s = \int_{*}^{**} ds$$

hvor

$$ds = \sqrt{1 + (\tfrac{dy}{dx})^2}\,dx = \sqrt{1+\sinh^2 x}\,dx = \cosh x\,dx$$

Dette gir

$$s = \int_0^2 \cosh x\,dx = [\sinh x]_0^2 = \underline{\underline{\sinh 2}}$$

Areal av rotasjonsflaten dannet ved rotasjon av K om x-aksen:

$$A = \int_{*}^{**} 2\pi y\,ds$$

$$= 2\pi\int_0^2 \cosh x\cdot\cosh x\,dx = 2\pi\int_0^2\cosh^2 x\,dx$$

Definisjon av hyperbolsk cosinus gir

$$\cosh^2 x = \frac{1}{4}(e^{2x} + 2 + e^{-2x})$$

hvilket gir

$$A = \frac{\pi}{2}\int_0^2 (e^{2x} + 2 + e^{-2x})\,dx$$

$$= \frac{\pi}{2}\left[\frac{1}{2}(e^{2x} - e^{-2x}) + 2x\right]_0^2 = \frac{\pi}{2}[\sinh 2x + 2x]_0^2$$

$$= \underline{\underline{\frac{\pi}{2}(\sinh 4 + 4)}}$$

Oppg. 5

a)

(i) Undersøkelse av konvergens for

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n+\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Rekken er alternerende med $|a_n| > |a_{n+1}|$ og $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$ så rekken konvergerer.

Ser på rekken

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

og sammenligner med den divergente harmoniske rekken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{1/n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+1/\sqrt{n}} = 1$$

så rekken konvergerer ikke absolutt ved grensesammenligning

Dette betyr at $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n+\sqrt{n}}$ konvergerer betinget.

(ii) Undersøkelse av konvergens for rekken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!\,(2n)^n}$$

La
$$s_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\dfrac{(2n+2)!}{(n+1)!\,(2n+2)^{n+1}}}{\dfrac{(2n)!}{n!\,(2n)^n}} = \frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)(2n+2)} \cdot \frac{(2n)^n}{(2n+2)^n}$$

$$= \frac{2n+1}{n+1} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^{-n} = \frac{2n+1}{n+1} \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}$$

Ser så på

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2+1/n}{1+1/n} \Big/ \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

$$= \frac{2}{e} < 1$$

Ved forholdskriteriet konvergerer derfor

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!\,(2n)^n}$$

absolutt.

Oppg. 5

b) Konvergensintervall for potensrekken

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{4}\right)^n \frac{(x+4)^n}{2n+1}$$

La
$$s = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\left(-\frac{1}{4}\right)^{n+1} \frac{(x+4)^{n+1}}{2n+3}}{\left(-\frac{1}{4}\right)^n \frac{(x+4)^n}{2n+1}} \right|$$

$$= \frac{1}{4} \cdot |x+4| \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{2+1/n}{2+3/n}$$

$$= \frac{1}{4} |x+4|$$

Rekken konvergerer for $s < 1$, hvilket gir

$$-1 < \frac{1}{4}(x+4) < 1$$

$$\Rightarrow \quad \underline{-8 < x < 0}$$

Sjekk av endepunkter:

$\underline{x = -8}$:

$$a_n = \left(-\frac{1}{4}\right)^n \cdot \frac{(-4)^n}{2n+1} = \frac{1}{2n+1}$$

Sammenligner med den divergente harmoniske rekken $\sum_{n=1} \frac{1}{n}$

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2+1/n} = \frac{1}{2} > 0$$

Ved grensesammenligningskriteriet divergerer rekken for $x = -8$

$\underline{x = 0}$:

$$a_n = \left(-\frac{1}{4}\right)^n \cdot \frac{4^n}{2n+1} = (-1)^n \cdot \frac{1}{2n+1}$$

Vi får altså en alternerende rekke der $|a_n| > |a_{n+1}|$ og $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$, så rekken konvergerer.

Vi har altså at konvergensintervallet for

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{4}\right)^n \frac{(x+4)^n}{2n+1}$$

er

$$\underline{\underline{(-8, 0]}}$$

Oppg. 6

$P_5(x) = 1 + 3x + 5x^3 - x^5$

er Taylorpolynom. av grad 5 om $a = 0$ for seks ganger deriverbar funksjon $f(x)$.

Generelt er Taylorpolynomet av grad n om $a=0$ gitt ved

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k$$

Ved sammenligning av koeffisienter får vi derfor

$$f''(0) = 2! \cdot b_2 = 2 \cdot 0 = \underline{\underline{0}}$$

$$f'''(0) = 3! \cdot b_3 = 6 \cdot 5 = \underline{\underline{30}}$$

Vet at $|f^{(6)}(x)| \leq 72$ for alle x.

Taylors formel med restledd er

$$f(x) = P_5(x) + R_5(x) \quad , \quad R_5(x) = \frac{1}{6!} f^{(6)}(z)\, x^6$$

$$\Rightarrow |R_5(x)| = |f(x) - P_5(x)|$$

Ønsker $|R_5(x)| \leq 10^{-7}$. Dette oppnås når

$$|R_5(x)| \leq \frac{72}{720} \cdot |x|^6 \leq 10^{-7} \Rightarrow |x|^6 \leq 10^{-6} \Rightarrow \underline{|x| \leq 10^{-1}}$$

Vi er med andre ord garantert at $|R_5(x)| \leq 10^{-7}$ for

$$\underline{\underline{-0.1 \leq x \leq 0.1}}$$

Oppg. 7

Halveringstid for ^{210}Po:

$$\tau = 140 \text{ dg}$$

La n være antall halveringstider for å redusere en mengde M_0 til en mengde M_1. Har da at

$$M_1 = \left(\tfrac{1}{2}\right)^n M_0$$

I dette tilfellet er $M_1 = M$, $M_0 = 8M$. Dette gir

$$1 = \left(\tfrac{1}{2}\right)^n \cdot 8$$

$$\Rightarrow 2^n = 8 \Rightarrow n = \frac{\ln 8}{\ln 2} = \underline{3}$$

Tiden for å redusere $8M$ ^{210}Po til M ^{210}Po er derfor

$$t = 3\tau = 3 \cdot 140 \text{ dg} = \underline{\underline{420 \text{ dg}}}$$