Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:

Vigdis Petersen	73 59 35 29
Berner Larsen	73 59 35 25
Bjørn Ian Dundas	73 55 02 42

EKSAMEN I FAG SIF5003 MATEMATIKK 1

Onsdag 8. desember 1999
Tid: 09:00–14:00

Hjelpemidler: B2 - Typegodkjent kalkulator med tomt minne.
- Rottmann: *Matematisk Formelsamling.*

Sensuren faller i uke 4.

Oppgave 1 skal besvares uten begrunnelse. På de andre oppgavene må det være med så mye mellomregning at fremgangsmåten fremgår tydelig av besvarelsen.

Oppgave 1 For hver av rekkene

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

avgjør om den er

i) absolutt konvergent ii) betinget konvergent iii) divergent.

Svarene skal ikke begrunnes.

Oppgave 2 Finn grensene

$$\text{i)} \lim_{x\to\infty} x(e^{\frac{1}{x}} - 1) \qquad \text{ii)} \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 2x}{(\arctan x)^2}$$

Oppgave 3

a) La $f(x) = \sqrt{1+x^4}$. Finn største og minste verdi av

$$f''(x) = \frac{2x^2(x^4+3)}{(1+x^4)^{\frac{3}{2}}}$$

på intervallet $[0, 2]$.

b) Bruk trapesmetoden med fire delintervaller til å finne en tilnærmet verdi for integralet

$$(*) \qquad \int_0^2 \sqrt{1+x^4}\, dx\,.$$

Gjør et overslag over feilen ved å benytte resultatet fra **a)**.
Forklar hvorfor trapesmetoden gir en for stor verdi for integralet $(*)$, uansett antall delintervaller.

Oppgave 4 For summen av en endelig geometrisk rekke gjelder formelen

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1-x}, \qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

når $x \neq 1$.
Vis dette ved induksjon.

Oppgave 5 En båt trekkes mot kaia ved hjelp av et tau. Den ene enden av tauet er festet i baugen av båten, den andre enden går gjennom en ring som er festet på kaikanten. Høydeforskjellen mellom ringen og baugen er 5 m.
En person trekker i tauet med en hastighet av 24 m/min. Med hvor stor fart nærmer båten seg kaia i det øyeblikk taulengden mellom ringen og baugen er 13 m?

Oppgave 6 Når strømmen går klokken 00.00 den 1. januar år 2000, sitter Kjell Magne på sitt kontor som da holder temperaturen 19.0°C. Fra dette tidspunkt avtar temperaturen på kontoret i samsvar med Newtons avkjølingslov: Temperaturendringen pr. tidsenhet er proporsjonal med differansen mellom inne- og utetemperatur. Utetemperaturen denne rekordkalde natten er −36.9°C. Klokken 01.00 er temperaturen på kontoret falt til 10.8°C.
På Kjell Magnes bord står et glass med vann. Hva er klokken når vannet i glasset begynner å fryse?

Oppgave 7 Bestem konvergensradien R til potensrekken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin(\frac{1}{n})\, x^n \,.$$

Undersøk også om rekken konvergerer for $x = -R$ og $x = R$.

Oppgave 8 Sirkelen med radius 1 og sentrum i punktet $(0, 2)$ har parameterfremstilling:

$$x = \sin t\,, \qquad y = 2 + \cos t\,, \qquad 0 \le t \le 2\pi\,.$$

Finn ved integrasjon overflatearealet av "smultringensom dannes når sirkelen roteres om x-aksen.

Oppgave 9
En vanntank fremkommer ved at kurven $x = g(y)$ roteres om y-aksen. Vannvolumet V ved vannhøyde y er gitt ved

$$V = \int_0^y \pi \cdot (g(u))^2\, du\,.$$

Ved et bestemt tidspunkt lages et lite hull i bunnen av tanken. I følge Torricellis lov er volumendringen pr. tidsenhet gitt ved

$$\frac{dV}{dt} = -k\sqrt{y}$$

hvor y er vannhøyden og k er en positiv konstant.
Bestem funksjonen $g(y)$ når du får oppgitt at endringen pr. tidsenhet i vannhøyden y er konstant (dvs., $\frac{dy}{dt}$ er konstant), og vannvolumet $V = 1$ når vannhøyden $y = 1$.