SIF5003 Matematikk 1
Eksamen 08.12.1999

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Løsningsforslag

$\boxed{1}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}} : \textit{Divergent.} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} : \textit{Absolutt konvergent.}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} : \textit{Betinget konvergent.}$$

$\boxed{2}$

(i)
$$\lim_{x\to\infty} x(e^{\frac{1}{x}}-1) = \lim_{x\to\infty} \frac{(e^{\frac{1}{x}}-1)}{\frac{1}{x}} \overset{t=\frac{1}{x}}{=} \lim_{t\to 0} \frac{(e^t-1)}{t} \overset{\text{l'Hôpital}}{=} \lim_{t\to 0} \frac{e^t}{1} = 1$$

(ii)
$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 2x}{(\arctan x)^2} \overset{\text{l'Hôpital}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2\sin 2x}{2\arctan x \cdot \frac{1}{1+x^2}} = \lim_{x\to 0}(1+x^2) \lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{\arctan x}$$
$$= 1 \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{\arctan x} \overset{\text{l'Hôpital}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2\cos 2x}{\frac{1}{1+x^2}} = 2$$

$\boxed{3}$ **a)** For å finne største og minste verdi til $f''(x) = \frac{2x^2(x^4+3)}{(1+x^4)^{\frac{3}{2}}}$ over intervallet $[0,2]$, ser vi på den deriverte $f'''(x)$ til $f''(x)$:

$$f'''(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{2x^2(x^4+3)}{(1+x^4)^{\frac{3}{2}}}\right) = -\frac{12x(x-1)(x+1)(x^2+1)}{(1+x^4)^{\frac{5}{2}}}.$$

Vi ser at $x=1$ er det eneste nullpunktet for $f'''(x)$ i det åpne intervallet $(0,2)$. Vi sammenligner verdiene til $f''(x)$ i det kritiske punktet $x=1$ og endepunktene $x=0$ og $x=2$: $f''(0)=0$, $f''(1)=2\sqrt{2}=2.828\cdots$ og $f''(2)=\frac{152}{289}\sqrt{17}=2.168\cdots$. Av dette ser vi at

$$f''_{\max} = 2\sqrt{2} \qquad f''_{\min} = 0 \qquad \text{på intervallet } [0,2].$$

b) Trapesmetoden med fire delintervaller brukt på integralet

(I) $$\int_0^2 \sqrt{1+x^4}\,dx\,.$$

gir $\Delta = \frac{2-0}{4} = 0.5$ (lengden på delintervallene) og delepunktene $x_0 = 0$, $x_1 = 0.5$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1.5$ og $x_4 = 2$. Med $f(x) = \sqrt{1+x^4}$ får vi tabellen:

x	0.0	0.5	1.0	1.5	2.0
$f(x)$	1.0000	1.0308	1.4142	2.4622	4.1231

som gir følgende tilnærmede verdi T_4 for integralet:

$$\begin{aligned}\int_0^2 \sqrt{1+x^4}\,dx \approx T_4 &= \frac{\Delta}{2}\left(f(0) + 2\cdot f(0.5) + 2\cdot f(1.0) + 2\cdot f(1.5) + f(2.0)\right)\\ &\approx 0.25(1.0000 + 2\cdot 1.0308 + 2\cdot 1.4142 + 2\cdot 2.4622 + 4.1231)\\ &= 3.734375 \approx 3.73\,.\end{aligned}$$

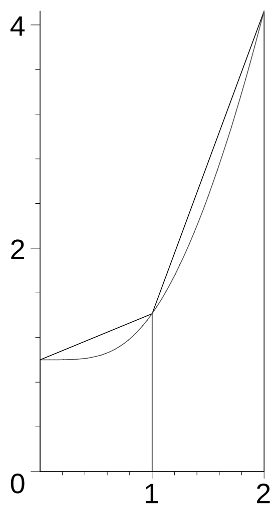
For feilen $|ET_n|$ i trapesmetoden over et intervall $[a,b]$ med n delintervaller har vi estimatet:

$$|ET_n| \le \frac{K_2(b-a)^3}{12n^2}$$

hvor K_2 er et tall slik at $K_2 \ge |f''(x)|$ for $a \le x \le b$. I vårt tilfelle er $a = 0$, $b = 2$, $n = 4$. Fra **a)** følger at $|f''(x)| \le 2\sqrt{2}$ når $0 \le x \le 2$, så vi kan ta $K_2 = 2\sqrt{2}$. Dette gir

$$|ET_4| \le \frac{2\sqrt{2}\cdot 2^3}{12\cdot 4^2} = .1178511302\cdots < 0.12\,.$$

Mao.: Feilen i trapesmetoden er mindre enn 0.12 [a]. Siden $f''(x) = \frac{2x^2(x^4+3)}{(1+x^4)^{\frac{3}{2}}} \ge 0$, er funksjonen $f(x) = \sqrt{1+x^4}$ *konkav oppover*. Dette betyr at trapesmetoden gir en *for stor verdi* [b], fordi arealet under de approksimerende trapesene er større enn arealet under kurven (figuren til høyre illustrerer dette for $n = 2$).



[a] Dette gir følgende noe grove estimat for integralet (I): Siden $3.73 < T_4 < 3.74$ og $-0.12 < ET_4 < 0.12$, blir $3.61 < T_4 + ET_4 = \int_0^2 \sqrt{1+x^4}\,dx < 3.86$.

[b] Siden vi nå vet at $-0.12 < ET_4 < 0$, får vi et bedre estimat: $3.61 < \int_0^2 \sqrt{1+x^4}\,dx < 3.74$. Den eksakte verdien, avrundet til to desimaler, er 3.65.

$\boxed{4}$ Anta $x \neq 1$ og sett

$$P(n): \qquad 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}, \qquad n = 0,1,2,3,\ldots\,,$$

dvs., $P(n)$ er påstand nr. n. Vi må først sjekke at påstanden $P(0)$ holder:

$$P(0): \qquad 1 = \frac{1-x}{1-x}, \qquad \text{som er riktig.}$$

Vi antar så at $P(n)$ er riktig, og viser at dette medfører at også $P(n+1)$ er riktig, dvs., vi må vise implikasjonen

$$P(n) \Longrightarrow P(n+1)\,.$$

For å gjøre dette, skriver vi opp påstanden $P(n+1)$ og prøver å vise at venstresiden (V.S.) i $P(n+1)$ er lik høyresiden (H.S.) i $P(n+1)$ (under forutsetning av at $P(n)$ holder):

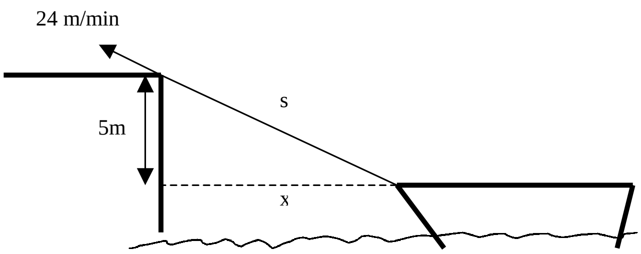
$$P(n+1){:}\quad 1+x+x^2+x^3+\cdots+x^{n+1} = \frac{1-x^{n+2}}{1-x}, \qquad n=0,1,2,3,\ldots$$

$$\text{V.S.} = 1+x+x^2+x^3+\cdots+x^{n+1} = (1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n)+x^{n+1}$$

$$\overset{P(n)}{=} \frac{1-x^{n+1}}{1-x}+x^{n+1} = \frac{1-x^{n+1}+x^{n+1}-x^{n+2}}{1-x} = \frac{1-x^{n+2}}{1-x} = \text{H.S.}$$

som viser at $P(n+1)$ holder (når $P(n)$ gjør det). Induksjonsbeviset er dermed ferdig.

$\boxed{5}$ Dersom $s=s(t)$ betegner taulengden (i meter) mellom ringen og baugen, og $x=x(t)$ betegner (den horisontale) avstanden (i meter) mellom baugen og kaia, har vi til enhver tid relasjonen:



$$x^2+5^2=s^2\,.$$

Derivasjon av denne relasjonen mhp. tiden t gir:

$$(*)\qquad 2x\cdot\frac{dx}{dt} = 2s\cdot\frac{ds}{dt} \quad \text{dvs.} \quad \frac{dx}{dt}=\frac{s}{x}\frac{ds}{dt}$$

I det øyeblikket taulengden $s=13\,(\text{m})$, er $x=\sqrt{13^2-5^2}=\sqrt{144}=12\,(\text{m})$. Videre er det oppgitt at $\frac{ds}{dt}=-24(\text{m/min})$. Innsetting i $(*)$ gir:

$$\frac{dx}{dt}=\frac{13}{12}\cdot(-24) = -26\,(\text{m/min})\,,$$

dvs., avstanden mellom båten og kaia avtar med 26 m/min.

$\boxed{6}$ Dersom $T=T(t)$ er temperaturen på Kjell Magnes kontor ved tiden t, og T_{ute} er den konstante utetemperaturen, sier Newtons lov:

$$\text{(N)}\qquad \frac{dT}{dt} = -k(T-T_{\text{ute}})$$

hvor k er en positiv konstant. Vi setter foreløpig $T(0)=T_0$, og løser differensialligningen (N) ved separasjon av de variable:

$$\int\frac{dT}{T-T_{\text{ute}}} = -k\int dt \Rightarrow \ln(T-T_{\text{ute}}) = -kt+C \Rightarrow T-T_{\text{ute}} = e^Ce^{-kt}$$

$$T = T_{\text{ute}}+e^Ce^{-kt}$$

Innsetting for $t = 0$ i den siste ligningen gir:

$$T_0 = T_{\text{ute}} + e^C \Rightarrow e^C = T_0 - T_{\text{ute}}$$
$$T = T_{\text{ute}} + (T_0 - T_{\text{ute}})e^{-kt}$$

Vi lar $t = 0$ svare til klokken 00.00 den 1. januar 2000, og bruker tallverdiene fra oppgaven: $T_0 = 19.0$, $T_{\text{ute}} = -36.9$. Dette gir:

$$T = -36.9 + (19.0 - (-36.9))e^{-kt} = 55.9 \cdot e^{-kt} - 36.9$$

Bruker så at $T = 10.8$ klokken 01.00, dvs. når $t = 1$ (vi måler t i timer):

$$10.8 = (55.9)e^{-k\cdot 1} - 36.9 \Rightarrow e^{-k} = \frac{10.8 + 36.9}{55.9} = \frac{47.7}{55.9} \Rightarrow k = \ln 55.9 - \ln 47.7$$
$$T = 55.9 \cdot e^{-(\ln 55.9 - \ln 47.7)t} - 36.9$$

Bestemmer til slutt når vannet i glasset begynner å fryse, dvs. når $T = 0$:

$$T = 55.9 \cdot e^{-(\ln 55.9 - \ln 47.7)t} - 36.9 = 0 \Rightarrow e^{-(\ln 55.9 - \ln 47.7)t} = \frac{36.9}{55.9}$$
$$\Rightarrow t = \frac{\ln 55.9 - \ln 36.9}{\ln 55.9 - \ln 47.7} \approx 2.6183 \approx 2 \text{ timer og } 37 \text{ min.},$$

mao.: *Vannet begynner å fryse ca. kl. 02.37 den 1. januar 2000.*

$\boxed{7}$ Vi bruker forholdstesten på rekken $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(\frac{1}{n})x^n$, og får, med $u_n = \sin(\frac{1}{n})x^n$:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\sin(\frac{1}{n+1})|x|^{n+1}}{\sin(\frac{1}{n})|x|^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sin(\frac{1}{n+1})}{\sin(\frac{1}{n})}|x| \overset{\text{Hôpital}}{=} \lim_{n\to\infty}\frac{\cos(\frac{1}{n+1})(-\frac{1}{(n+1)^2})}{\cos(\frac{1}{n})(-\frac{1}{n^2})}|x|$$
$$= \frac{\cos 0}{\cos 0}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^2}|x| = |x|\,.$$

I følge forholdstesten har vi at rekken konvergerer når $|x| < 1$ og divergerer når $|x| > 1$, dvs.: *Konvergensradien $R = 1$.*
Endepunkter.
$\underline{x = 1}$: Vi får den positive rekken $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(\frac{1}{n})$. Grensesammenligning med den harmoniske rekken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ gir:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin(\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} \overset{t=\frac{1}{n}}{=} \lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t} \overset{\text{l'Hôpital}}{=} \lim_{t\to 0}\frac{\cos t}{1} = 1\,.$$

Siden $1 > 0$ og den harmoniske rekken er divergent, følger ved grensesammenligningstesten at $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(\frac{1}{n})$ er *divergent.*
$\underline{x = -1}$: Her får vi den alternerende rekken $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \sin(\frac{1}{n})$. Med $a_n = \sin(\frac{1}{n})$ har vi $a_{n+1} = \sin(\frac{1}{n+1}) < \sin(\frac{1}{n}) = a_n$, og $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\sin(\frac{1}{n}) = 0$, så rekken er *konvergent* i følge testen for alternerende rekker.

$\boxed{8}$ Siden vi har rotasjon om x-aksen, bruker vi formelen $A = \int 2\pi y\, ds$ for overflatearealet til rotasjonslegemet. Vi har $ds = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\,dt$, som med $x = \sin t$ og $y = 2 + \cos t$ gir $ds = \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t}\,dt = dt$, så

$$A = \int_{*}^{**} 2\pi y\, ds = \int_0^{2\pi} 2\pi(2 + \cos t)\,dt = 2\pi[2t + \sin t]_0^{2\pi} = 2\pi[2\cdot 2\pi + 0 - 0]$$
$$= 8\pi^2$$

$\boxed{9}$ Siden $V = \int_0^y \pi(g(u))^2\,du$, har vi $\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dy}\frac{dy}{dt} = \pi g(y)^2 \cdot \frac{dy}{dt}$ ved kjerneregelen. Dersom vi kombinerer dette med Torricellis lov og opplysningen $\frac{dy}{dt} = -c$ (hvor c er en positiv konstant), får vi:

$$\frac{dV}{dt} = \pi g(y)^2 \cdot \frac{dy}{dt} = \pi g(y)^2 \cdot (-c) = -k\sqrt{y}$$
$$\Rightarrow g(y) = \sqrt{\frac{k}{\pi c}}\, y^{\frac{1}{4}}$$

Vi bruker så opplysningen om at $V = 1$ når $y = 1$:

$$V_{y=1} = \int_0^1 \pi g(u)^2\,du = \int_0^1 \pi \frac{k}{\pi c} u^{\frac{1}{2}}\,du = \frac{k}{c}\left[\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{k}{c}\cdot\frac{2}{3} = 1$$
$$\Rightarrow \quad \frac{k}{c} = \frac{3}{2}$$
$$\Rightarrow \quad g(y) = \sqrt{\frac{3}{2\pi}}\, y^{\frac{1}{4}}$$