Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Vigdis Petersen, 73 59 16 50

EKSAMEN I FAG SIF5003 MATEMATIKK 1

lørdag 5. august 2000
Tid: 0900-1400

Tillatte hjelpemidler:
- Typegodkjent kalkulator med tomt minne,
- Rottmann: *Matematisk formelsamling.*

Alle svar skal begrunnes. Det må være med så mye mellomregning at fremgangsmåten fremgår tydelig av besvarelsen. Rene kalkulatorsvar godtas ikke.

Oppgave 1
Avgjør om følgende grensene eksisterer. Dersom grensen eksisterer skal du også finne grensen.

$$(i) \quad \lim_{x\to 0}(e^x + e^{-x})^{1/x}, \qquad (ii) \quad \lim_{t\to\infty}(\sqrt{t+t^2} - t)$$

Oppgave 2
Finn volum og overflateareal av legemet som fremkommer ved å dreie området begrenset av kurvene $y = x$ og $y = x^2$ om y-aksen.

Oppgave 3
Vis ved induksjon at for alle hele positive tall n så er

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2$$

(om du vil kan du bruke at $1 + 2 + 3 + \cdots + n = n(n+1)/2$).

Oppgave 4
En sfærisk ballong fylles med en rate av 1000 kubikkcentimeter per sekund. Med hvilken rate vokser overflatearealet til ballongen når radius er 25 cm?

Oppgave 5
Skisser i xy-planet kurven gitt ved

$$x = \sin t, \quad y = \sin 2t, \qquad t \in [0, 2\pi]$$

Finn tangentlinjene i $t = 0$ og $t = \pi/4$, og beregn arealet av området begrenset av kurven.

Oppgave 6
Tidlig en mandag morgen begynte det å sne med en konstant rate. Klokken 06.00 begynte en sneplog å rydde en vei. Klokken 07.00 hadde den kjørt 5 km. Først klokken 09.00 hadde den kjørt 10 km.

Anta at plogen rydder unna sne med en konstant rate (i f.eks. kubikkmeter per time). La $t = 0$ idet det begynner å sne, og la $x(t)$ være distansen sneplogen har kjørt ved tid t.

Forklar hvorfor

$$t \cdot x'(t) = k$$

for en konstant k.

Hva var klokken da det startet å sne?

Oppgave 7
La f være en to ganger deriverbar funksjon med $f'(x) > 0$ for $x \in [1, 2]$, og slik at $f(1) = -3$ og $f(2) = 5$.

a) Begrunn at funksjonen f har nøyaktig ett nullpunkt $a \in (1, 2)$.

b) Anta i tillegg at $f''(x) > 0$ for $x \in [1, 2]$. Begrunn at Newtons metode med startverdi $x_0 = 2$ konvergerer mot nullpunktet a.

Oppgave 8

La

$$I = \int_0^{\sqrt{\pi/4}} \sin(t^2)\, dt$$

a) Finn en tilnærming til I ved å bruke Simpsons metode, hvor intervallet $[0, \sqrt{\pi/4}]$ skal deles i fire like deler.

b) Finn en tilnærming til I ved å bruke Taylor-utviklingen av orden 3 til $f(x) = \sin x$ om $x = 0$.