SIF5003 Matematikk 1
eksamen 05.08.00

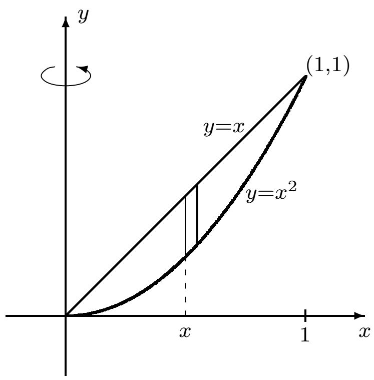
Løsningsforslag

1 (i) Vi har $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(e^x+e^{-x}\right)^{1/x} = 2^\infty = \infty$ og $\lim\limits_{x\to 0^-}\left(e^x+e^{-x}\right)^{1/x} = 2^{-\infty} = 0.$

Grenseverdien $\lim\limits_{x\to 0}\left(e^x+e^{-x}\right)^{1/x}$ eksisterer følgelig ikke.

(ii)
$$\lim_{t\to\infty}\left(\sqrt{t+t^2}-t\right) = \lim_{t\to\infty} t\left(\sqrt{1/t+1}-1\right) = \lim_{t\to\infty}\frac{\sqrt{1/t+1}-1}{1/t} \qquad (u=1/t)$$
$$= \lim_{u\to 0^+}\frac{\sqrt{u+1}-1}{u} \overset{\text{“}0/0\text{”}}{=} \lim_{u\to 0^+}\frac{1/(2\sqrt{u+1})}{1} = \frac{1}{2}$$

2



Volumet V ved rotasjon om y-aksen kan vi finne f.eks. ved hjelp av sylinderskallmetoden:

$$V = \int_*^{**} 2\pi r\,dA = \int_0^1 2\pi x(x-x^2)\,dx$$
$$= 2\pi\int_0^1 (x^2-x^3)\,dx = \frac{\pi}{6}.$$

Overflatearealet er $A = A_1 + A_2$ der av A_1 er arealet av rotasjonsparaboloiden og A_2 er arealet av kjegleflaten:

$$A_1 = \int_*^{**} 2\pi r\,ds = \int_0^1 2\pi x\sqrt{1+(2x)^2}\,dx = \left[\frac{\pi}{6}(1+4x^2)^{3/2}\right]_0^1 = \frac{\pi}{6}\left(5\sqrt{5}-1\right)$$
$$A_2 = \pi r s = \pi\cdot 1\cdot\sqrt{2} = \pi\sqrt{2}, \qquad A = A_1 + A_2 = \frac{\pi}{6}\left(6\sqrt{2}+5\sqrt{5}-1\right).$$

3 Vi skal vise formelen

$$P_n: \qquad 1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 \qquad \text{for } n=1,\,2,\,3,\,\ldots$$

ved induksjon. For $n=1$ er formelen riktig siden $1^3 = [(1\cdot 2)/2]^2$. Vi antar så at P_n er riktig for $n=k$, $1^3+2^3+3^3+\cdots+k^3 = \left[\frac{1}{2}k(k+1)\right]^2$. Vi må vise at den da også er riktig for $n=k+1$, dvs. at da er $1^3+2^3+3^3+\cdots+(k+1)^3 = \left[\frac{1}{2}(k+1)(k+2)\right]^2$:

$$1^3+2^3+\cdots+(k+1)^3 = \left(1^3+2^3+3^3+\cdots+k^3\right)+(k+1)^3$$
$$\overset{P_k}{=} \left[\frac{k(k+1)}{2}\right]^2 + (k+1)^3 = (k+1)^2\left[\frac{k^2}{2^2}+(k+1)\right]$$
$$= (k+1)^2\left[\frac{k^2+4k+4}{4}\right] = \left[\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right]^2.$$

Ved induksjon følger at formelen P_n er riktig for alle positive hele tall.

4 Volumet av ballongen er $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, og overflatearealet er $A = 4\pi r^2$. Volumets vekstrate, i cm^3/s, er $1000 = dV/dt = 4\pi r^2 dr/dt$. Da får vi

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1000}{4\pi r^2} \qquad \text{og følgelig} \qquad \frac{dA}{dt} = 8\pi r\frac{dr}{dt} = 8\pi r\frac{1000}{4\pi r^2} = \frac{2000}{r}.$$

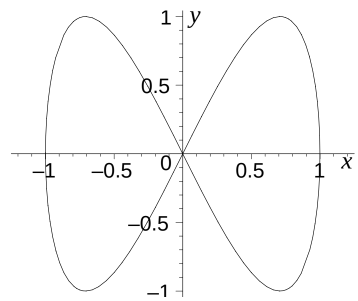
Når $r = 25$ cm, er altså $dA/dt = 2000/25 = 80$ (cm^2/s).

5 Vi kan skissere kurven ved å regne ut $x = \sin t$, $y = \sin 2t$ og $dy/dx = \dot{y}/\dot{x} = 2\cos 2t/\cos t$ for forskjellige verdier av t, eller vi kan finne en ligning for kurven ved å eliminere parameteren t:

$$y = \sin 2t = 2\sin t\cos t = 2\sin t\left(\pm\sqrt{1-\sin^2 t}\right) = \pm 2x\sqrt{1-x^2}.$$

Kurven er symmetrisk om x-aksen og y-aksen, så vi trenger bare punkter i første kvadrant.

t	x	y	dy/dx
0	0	0	2
$\pi/4$	$1/\sqrt{2}$	1	0
$\pi/2$	1	0	∞



Fra tabellen med x, y og dy/dx ser vi at tangenten $y - y_0 = k(x - x_0)$ i punktene med parameterverdier $t = 0$ og $t = \pi/4$ blir

$$t = 0: \quad y = 2x, \qquad t = \pi/4: \quad y = 1.$$

For arealet A av området begrenset av kurven får vi

$$A = 4\int_0^1 y\,dx = 4\int_0^{\pi/2} \sin 2t\,(\cos t\,dt) = 4\int_0^{\pi/2} 2\sin t\cos^2 t\,dt = 4\Big[-\frac{2}{3}\cos^3 t\Big]_0^{\pi/2} = \frac{8}{3}.$$

6 Vi har $t = 0$ når det begynner å snø med konstant rate r. Ved tiden t er snødybden da $h = rt$. La plogens bredde være b. Hvis $x = x(t)$ er vegstrekningen som plogen har kjørt, og $V = V(t)$ er bortryddet snømengde, har vi

$$\frac{dV}{dt} = b\cdot rt\cdot\frac{dx}{dt}\,.$$

Vi har gitt at plogen rydder snø med konstant rate, $dV/dt = a$, og får

$$t\frac{dx}{dt} = k \qquad (\text{der } k = a/br).$$

Differensialligningen kan skrives $dx/dt = k/t$ og har generell løsning $x(t) = k\ln t + C$. Vi setter $t = t_0$ når plogen begynner å kjøre kl. 0600, og bestemmer t_0 ved å sette inn de gitte opplysningene.

$$\begin{array}{llrl}
\text{(kl. 0600)} & x(t_0) = 0: & 0 = k\ln t_0 + C & (1)\\
\text{(kl. 0700)} & x(t_0+1) = 5: & 5 = k\ln(t_0+1) + C & (2)\\
\text{(kl. 0900)} & x(t_0+3) = 10: & 10 = k\ln(t_0+3) + C & (3)
\end{array}$$

Av ligning (1) får vi $C = -k \ln t_0$ som innsatt i (2) og (3) gir

$$5 = k \ln (t_0 + 1) - k \ln t_0 = k \ln \frac{t_0 + 1}{t_0}$$
$$10 = k \ln (t_0 + 3) - k \ln t_0 = k \ln \frac{t_0 + 3}{t_0}.$$

Herav følger

$$\ln \frac{t_0 + 3}{t_0} = 2 \ln \frac{t_0 + 1}{t_0} = \ln \left(\frac{t_0 + 1}{t_0} \right)^2.$$

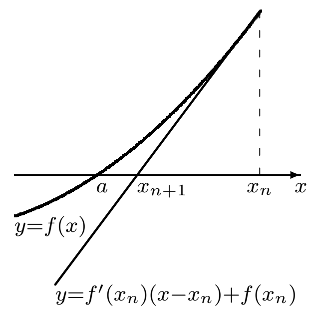
Dermed er $t_0(t_0 + 3) = (t_0 + 1)^2$ og følgelig $t_0 = 1$. Plogen startet altså $t_0 = 1$ time etter at det begynte å snø, det betyr at snøfallet startet kl. 0500.

$\boxed{7}$ **a)** Siden $f(1) = -3 < 0$, $f(2) = 5 > 0$ og f er deriverbar og følgelig kontinuerlig, har f minst ett nullpunkt $a \in (1, 2)$ ifølge skjæringssetningen.

Siden $f'(x) > 0$ er f strengt voksende på intervallet $[1, 2]$, og a er dermed det eneste nullpunktet for f i dette intervallet.

b) La $\{x_n\}$ være følgen av tilnærmingsverdier til a som vi får ved å bruke Newtons metode med startverdi $x_0 = 2$.

Grafen til f er voksende på $[1, 2]$ (fordi $f'(x) > 0$), og den blir brattere og brattere (med brattere tangent) jo større x er (fordi $f''(x) > 0$). Derfor ser grafen ut som på figuren, og tangenten i et punkt $(x_n, f(x_n))$ der $x_n > a$ må skjære x-aksen i et punkt mellom a og x_n. Det vil si



$$(*) \qquad a < x_{n+1} < x_n \qquad \text{for } n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ .$$

Av $(*)$ får vi at følgen $\{x_n\}$ er avtagende og nedtil begrenset, og dermed konvergent, $\lim_{n\to\infty} x_n = L$. Følgen er gitt ved $x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n)$. Ved å ta grenseverdien på begge sider får vi $\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} x_n - f(\lim_{n\to\infty} x_n)/f'(\lim_{n\to\infty} x_n)$ siden f og f' er kontinuerlige. $L = L - f(L)/f'(L)$ medfører $f(L) = 0$, og grenseverdien L er altså nullpunkt for f i intervallet $(1, 2)$. Men f har bare ett nullpunkt, a, i dette intervallet. Ergo er $L = a$ og $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

$\boxed{8}$ **a)** Vi skal bruke Simpsons metode med 4 delintervaller. Da er $\Delta t = \frac{1}{4}\sqrt{\pi/4} = \sqrt{\pi}/8$, og vi får følgende tabell med $t_i = i\Delta t$ og $y_i = \sin\left(t_i^2\right)$ for $i = 0,\ 1,\ \ldots 4$:

t_i	0	$\sqrt{\pi}/8$	$2\sqrt{\pi}/8$	$3\sqrt{\pi}/8$	$\sqrt{\pi}/2$
y_i	0	0.04907	0.19509	0.42756	0.70711

Da får vi, når vi avrunder sluttsvaret til 4 desimaler,

$$I = \int_0^{\sqrt{\pi/4}} \sin\left(t^2\right) dt \approx S_4 = \frac{\Delta t}{3}\left(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + y_4\right) = 0.2218.$$

b) For $f(x) = \sin x$ er Taylorpolynomet P_3 gitt ved $P_3(x) = x - x^3/6$. Bruker vi $P_3(x)$ som tilnærming til $f(x)$ får vi, med $x = t^2$, $\sin(t^2) \approx t^2 - t^6/6$. Det gir

$$I = \int_0^{\sqrt{\pi/4}} \sin\left(t^2\right) dt \approx \int_0^{\sqrt{\pi/4}} \left(t^2 - \tfrac{1}{6}t^6\right)\, dt = \left[\tfrac{1}{3}t^3 - \tfrac{1}{42}t^7\right]_0^{\sqrt{\pi/4}}$$
$$= \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{3/2} - \frac{1}{42}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{7/2} = 0.2218$$

der sluttsvaret igjen er avrundet til 4 desimaler.