Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Bjarte Rom 7359 3551
Dag Olav Kjellemo 7359 3549

EKSAMEN I FAG SIF5003 MATEMATIKK 1

Bokmål
Tirsdag 31. juli 2001
Tid: 09:00–14:00

Hjelpemidler: B2 – Typegodkjent kalkulator med tomt minne.
– Rottmann: *Matematisk Formelsamling.*

Sensuren faller 1. september.

Alle svar skal begrunnes, og det må være med så mye mellomregning at fremgangsmåten fremgår tydelig av besvarelsen. Rene kalkulatorsvar godtas ikke.

Oppgave 1 En rakett skytes ut ved tid $t = 0$. De første 120 sekundene har raketten en rettlinjet bevegelse med fart gitt ved

$$v(t) = 0{,}0004\,t^3 - 0{,}03\,t^2 + 8\,t \qquad (0 \leq t \leq 120)$$

målt i meter per sekund, der t er målt i sekunder. Finn den maksimale og minimale akselerasjonen til raketten i dette tidsrommet.

Oppgave 2 La R være området begrenset av linjen $y = 2$, y–aksen og kurven

$$x = t^3, \quad y = t^2 + 1, \qquad 0 \leq t \leq 1.$$

La T være omdreiningslegemet vi får når R roteres om y–aksen. Finn volumet av T med disse to metodene:

(i) tverrsnittmetoden (skivemetoden),
(ii) sylinderskallmetoden.

Oppgave 3 La funksjonen f være definert for $x > 0$. Anta at f er to ganger deriverbar med kontinuerlig annenderivert, og at $|f''(x)| \leq 5$ for alle $x > 0$.

a) Bruk trapesmetoden med fire delintervaller til å beregne en tilnærmet verdi for integralet

$$\int_1^3 f(x)\,dx$$

når funksjonsverdiene i enkelte punkter er gitt ved:

x	1	$3/2$	2	$5/2$	3
$f(x)$	-1	$-1/4$	$1/4$	$3/2$	3

Finn en øvre begrensning (skranke) for absoluttverdien av feilen.

b) Anta i tillegg at $|f(x)| \leq 3$ og $|f'(x)| \leq 4$ for $x > 0$. Tenk deg at du skal beregne integralet

$$\int_1^3 \left[f(x)\right]^2 dx$$

ved hjelp av trapesmetoden og med feil høyst 10^{-4}. Hvor mange delintervaller må du da bruke?

Oppgave 4 Sauen Dolly er syk, og veterinæren Trude skal ta temperaturen. Idet termometeret settes i sauen, viser det 15 °C. Etter 10 sekunder viser det 25 °C og etter 20 sekunder er det nådd 31 °C. Da blir Dolly rabiat, og termometeret faller ut og går i stykker. Hvor høy temperatur hadde sauen?

Du kan anta at endringsraten til termometerets temperatur er proporsjonal med temperaturdifferansen mellom sau og termometer (Newtons avkjølings/oppvarmingslov).

Oppgave 5 For hver av rekkene

$$(i)\quad \sum_{n=1}^{\infty} n e^{-n^2} \qquad\qquad (ii)\quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n}\right)$$

bestem om rekken divergerer, konvergerer absolutt eller konvergerer betinget.

Oppgave 6 Det lekker fra kjøkkentaket. Vi setter en sinkbøtte under lekkasjen. Sideflaten i bøtten er rotasjonsflaten du får ved å dreie linjestykket

$$y = 3(x - 10), \qquad y \in [0, 30]$$

om y–aksen, og bunnen i bøtten er plan. Her måles x og y i cm. Det lekker $1\,\mathrm{cm}^3/\mathrm{s}$. Hvor fort stiger vannet i bøtten når vanndybden er 10 cm?

Oppgave 7 Bruk rekkeutviklingen

$$\frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n \qquad (|t| < 1)$$

til å beregne integralet

$$\int_0^{1/2} \frac{1}{1+x^4}\, dx$$

med en feil mindre enn 10^{-4} i absoluttverdi.

Oppgave 8 Vi betrakter grafen til funksjonen

$$f(x) = \int_0^x \sqrt{(t^3+2)^2 - 1}\, dt \qquad \text{for } 0 \le x \le 2.$$

Finn lengden av grafen.

Oppgave 9 La $y = f(x)$ være en løsning av differensialligningen

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{xy - 1} \qquad \text{for } x > 1,$$

slik at $\lim_{x \to 1^+} f(x) = 1$. Beregn grenseverdiene

$$(i) \quad \lim_{x \to 1^+} \frac{xf(x) - 1}{x - 1} \qquad\qquad (ii) \quad \lim_{x \to 1^+} \frac{f(x) - 1}{(x-1)^{3/2}}$$

Hint: Du skal ikke *løse* differensialligningen. Du kan bruke resulatet fra (i) i del (ii).