LØSNINGSFORSLAG TIL EKSAMEN I SIF5003 MATEMATIKK 1
31 juli 2001

Oppgave 1. Akselerasjonen er

$$a(t) = v'(t) = 0.0012\,t^2 - 0.06\,t + 8.$$

Vi søker maksimum og minimum på intervallet $[0, 120]$.

$$a'(t) = 0.0024\,t - 0.06 = 0 \quad \text{for } \ t = 0.06/0.0024 = 25.$$

Videre er $a'(t) < 0$ for $t < 25$ og $a'(t) > 0$ for $t > 25$. $a(t)$ har derfor minimum for $t = 25$ og maksimum i et endepunkt for intervallet. Siden $a(0) = 8$ og $a(120) = 18.08$, er maksimal akselerasjon $a(120) = 18.08$ m/s^2. Minimal akselerasjon er $a(25) = 7.25\,\mathrm{m/s}^2$.

Oppgave 2.

(i)
$$V = \int_*^{**} \pi\, x^2\, dy = \int_0^1 \pi\, t^6 \cdot 2t\, dt = \left[2\pi \frac{t^8}{8}\right]_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

(ii)
$$V = \int_*^{**} (2-y)\cdot 2\pi\, x\, dx = \int_0^1 (2-t^2-1)2\pi\, t^3 3t^2 dt = 6\pi \int_0^1 (t^5-t^7)dt = \frac{\pi}{4}.$$

Oppgave 3

a) Trapesmetoden med fire delintervaller gir

$$\begin{aligned}\int_1^3 f(x)\, dx \approx T_4 &= \frac{3-1}{4} \cdot \frac{1}{2}\{f(1) + 2f(3/2) + 2f(2) + 2f(5/2) + f(3)\} \\ &= \frac{1}{4}\left(-1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 3 + 3\right) = \frac{5}{4}.\end{aligned}$$

Videre gjelder

$$\left|\int_1^3 f(x)\, dx - T_4\right| \le \frac{5\cdot(3-1)^3}{12\cdot 4^2} = \frac{5}{24} \approx 0.2.$$

b) La $F(x) = [f(x)]^2$. Med n delintervaller, er feilen begrenset av $M \cdot (3-1)^3/(12\cdot n^2)$, der M er en positiv konstant slik at $|F''(x)| \le M$ for $1 \le x \le 3$. Vi har $F'(x) = 2f(x)\cdot f'(x)$ og $F''(x) = 2f'(x)f'(x) + 2f(x)f''(x)$. Det vil si at $|F''(x)| \le 2|f'(x)|^2 + 2|f(x)f''(x)| \le 2\cdot 4^2 + 2\cdot 3\cdot 5 = 62$. Vi kan derfor bruke $M = 62$.

Feilen er høyst 10^{-4} når

$$\frac{62\cdot 2^3}{12\cdot n^2} \le 10^{-4}, \quad \text{det vil si,} \quad n^2 \ge \frac{62\cdot 8}{12}\cdot 10^4$$

som holder for $n \ge 643$.

Oppgave 4 La T_S være Dollys temperatur, og la $T(t)$ være termometerets temperatur ved tidspunkt t. Da gjelder

$$T'(t) = k(T_S - T(t))$$

der k er en positiv proporsjonalitetskonstant. Vi løser den separable differensialligningen:

$$\begin{aligned} \int \frac{dT}{T_S - T} &= k \int dt \\ -\ln|T_S - T| &= kt + C_1 \\ T_S - T(t) &= Ce^{-kt} \end{aligned}$$

der C er en vilkårlig reell konstant. Vi har videre

$$\begin{array}{lclcl} T(0) = 15 & \Rightarrow & T_S - 15 = C & \Rightarrow & T_S - T(t) = (T_S - 15)e^{-kt} \\ T(10) = 25 & \Rightarrow & T_S - 25 = (T_S - 15)e^{-10k} & \Rightarrow & e^{-10k} = \dfrac{T_S - 25}{T_S - 15} \\ T(20) = 31 & \Rightarrow & T_S - 31 = (T_S - 15)e^{-20k} = (T_S - 15) \cdot \left(\dfrac{T_S - 25}{T_S - 15}\right)^2 & & \end{array}$$

som er en ligning for T_S. Ligningen kan skrives

$$T_S^2 - 46T_S + 465 = T_S^2 - 50T_S + 625$$

og har løsning $T_S = 40$.

Oppgave 5

(i) Forholdstesten viser at rekken konvergerer absolutt siden

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(n+1)e^{-(n+1)^2}}{ne^{-n^2}} = \frac{n+1}{n}\, e^{-(n+1)^2+n^2} = \left(1 + \frac{1}{n}\right) e^{-2n-1} \to 1 \cdot 0 = 0$$

når $n \to \infty$.

(ii) Rekken er alternerende, men alternerende rekketesten kan ikke brukes her fordi leddene ikke avtar <u>monotont</u> mot 0.

På den annen side er $\sum(-1)^n/\sqrt{n}$ en konvergent rekke ved alternerende rekketesten, mens $\sum 1/n$ er den harmoniske rekken som divergerer. Altså kan ikke rekken konvergere. Konklusjon: rekken divergerer.

Oppgave 6 Radien i bøtten ved høyde $y = h$ er $x = h/3 + 10$. Når vannet når h cm opp i bøtten, er vannmengden i bøtten

$$V(h) = \frac{\pi h}{3}(10^2 + 10 \cdot (h/3 + 10) + (h/3 + 10)^2) = \frac{\pi}{3}\left(\frac{h^3}{9} + 10h^2 + 300h\right)$$

ifølge formelen for volumet av en avkortet kjegle (Rottman side 34). Vi søker dh/dt når $dV/dt = 1\,\mathrm{cm}^3/\mathrm{s}$. Kjerneregelen gir

$$\frac{dh}{dt} = \frac{dh}{dV} \cdot \frac{dV}{dt} = \frac{1}{\frac{dV}{dh}} = \frac{1}{\frac{\pi}{3}(\frac{h^2}{3} + 20h + 300)}$$

For $h = 10$ gir dette

$$\frac{dh}{dt} = \frac{9}{\pi} \cdot \frac{1}{100 + 600 + 900} = \frac{9}{1600\pi}.$$

Oppgave 7 Det lukkede integrasjonsintervallet ligger innenfor det åpne konvergensintervallet for rekken

$$\frac{1}{1+x^4} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^4)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{4n} \quad \text{for } |x^4| < 1.$$

Vi kan derfor integrere rekken leddvis. Det gir

$$\int_0^{1/2} \frac{1}{1+x^4}\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{1/2} (-1)^n x^{4n}\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(1/2)^{4n+1}}{4n+1}.$$

Dette er en alternerende rekke med monotont avtagende ledd. Siden $(1/2)^{13}/13 \approx 9 \cdot 10^{-6} < 10^{-4}$, holder det å ta med tre ledd av rekken. Det gir

$$\int_0^{1/2} \frac{1}{1+x^4}\, dx \approx \frac{1}{2} - \frac{(1/2)^5}{5} + \frac{(1/2)^9}{9} \approx 0.4940.$$

Oppgave 8 Lengden av grafen er

$$L = \int_*^{**} ds = \int_0^2 \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$$

der $f'(x) = \sqrt{(x^3+2)^2 - 1}$ ved fundamentalteoremet for integralregningen. Det gir

$$L = \int_0^2 \sqrt{1 + (x^3+2)^2 - 1}\, dx = \int_0^2 |x^3 + 2|\, dx = \int_0^2 (x^3+2)\, dx = 8.$$

Oppgave 9

(i) Ved L'Hôpitals regel gjelder

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{xf(x) - 1}{x - 1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{f(x) + xf'(x)}{1}$$

der $f(x)$ går mot 1 og $f'(x) = \sqrt{xf(x) - 1}$ går mot 0. Altså er

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{xf(x) - 1}{x - 1} = 1.$$

(ii) Også her kan vi bruke L'Hôpitals regel:

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{f(x) - 1}{(x-1)^{3/2}} = \lim_{x\to 1^+} \frac{f'(x)}{\frac{3}{2}(x-1)^{1/2}}$$

der $f'(x) = \sqrt{xf(x) - 1}$. Altså har vi

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{f(x) - 1}{(x-1)^{3/2}} = \frac{2}{3} \lim_{x\to 1^+} \frac{f'(x)}{\sqrt{x-1}} = \frac{2}{3} \lim_{x\to 1^+} \sqrt{\frac{xf(x) - 1}{x - 1}} = \frac{2}{3}$$

der vi har brukt resultatet fra (i).